Л. Г. Петерсон, Н. Х. Агаханов, А. Ю. Петрович,
О. К. Подлипский, М. В. Рогатова, Б. В. Трушин

ФГОС

Алгебра

8 класс

Часть 2

Издательство БИНОМ

Л. Г. Петерсон, Н. Х. Агаханов, А. Ю. Петрович,
О. К. Подлипский, М. В. Рогатова, Б. В. Трушин

Алгебра

8 класс

Часть 2

Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2017

УДК 373:51
ББК 22.1я721
П 29

Непрерывный курс математики для дошкольников, учащихся начальной и основной школы «Учусь учиться»

Научный руководитель — Л. Г. Петерсон,
доктор педагогических наук, профессор,
директор Центра системно-деятельностной педагогики
«Школа 2000...» ФГАОУ ДПО АПК и ППРО,
академик Международной академии наук педагогического образования,
лауреат Премии Президента РФ в области образования за 2002 год

Петерсон Л. Г.
П 29 Алгебра: 8 класс: В 3 ч. Ч. 2 / Л. Г. Петерсон, Н. Х. Агаханов, А. Ю. Петрович, О. К. Подлипский, М. В. Рогатова, Б. В. Трушин. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2017. — 160 с. : ил.

ISBN 978-5-9963-3228-1 (Ч. 2)
ISBN 978-5-9963-3230-4

Учебное издание ориентировано на развитие мышления и творческих способностей учащихся, формирование у них системы прочных математических знаний, общеучебных умений, развитие личностных качеств, познавательного интереса и ценностного отношения к образованию.

Является частью целостного учебно-методического комплекса «Учусь учиться» для дошкольников, учащихся начальной и основной школы (от 3 до 15 лет). Соответствует федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования.

Реализует дидактическую систему деятельностного метода обучения Л. Г. Петерсон. Отмечен Премией Президента РФ в области образования.

Может использоваться во всех типах школ.

Методическую поддержку по реализации УМК «Учусь учиться» осуществляет Центр системно-деятельностной педагогики «Школа 2000...» ФГАОУ ДПО АПК и ППРО. Подробную информацию можно получить на сайте www.sch2000.ru.

УДК 373:51
ББК 22.1 я721

ISBN 978-5-9963-3228-1 (Ч. 2)
ISBN 978-5-9963-3230-4

Чтобы учебником было удобно пользоваться,
в нем введены следующие обозначения:

К – задачи по новой теме для работы в классе,

Д – задачи для домашней работы,

П – повторение ранее пройденного,

С – задачи на смекалку,

□ – задания базового уровня,

□ – более сложные задания по новым темам и темам повторения,

□* – задания, требующие умения находить нестандартные способы решения,

■ – завершение доказательства теоремы.

* * * – материал для тех, кому интересно,

Глава 3
Исследование нелинейных процессов

§ 1. Представление о некоторых нелинейных процессах

1. Степенные функции и их графики

Без сомнения, тесные связи с физической реальностью важных разделов математики... вдохновляют и стимулируют математическую мысль.

Рихард Курант (1888–1972),
немецкий и американский математик и педагог

Наблюдая за различными величинами и на уроках, и в жизни, мы замечаем, что изменение одной из величин влечет определенное изменение другой. Это говорит о существовании зависимости между этими величинами. Мы уже знакомились с линейными зависимостями, однако многие величины связывает более сложная, нелинейная зависимость.

Рассмотрим, например, зависимость площади квадрата S, выраженной в квадратных сантиметрах, от длины его стороны a, выраженной в сантиметрах. Опишем, как изменяется площадь квадрата при увеличении длины его стороны в таблице, воспользовавшись формулой $S = a^2$.

a	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
S	0,25	1	2,25	4	6,25	9	12,25	16	20,25

В верхней строке таблицы мы выписали лишь некоторые возможные значения длины стороны a, однако она может принимать любые положительные значения. Таким образом, знакомая нам формула $S = a^2$ каждому положительному числу a ставит в соответствие *единственное* число S. Поэтому мы можем говорить о существовании *функциональной зависимости*, которая в более привычных обозначениях имеет вид: $y = x^2$, где x – независимая переменная, а y – зависимая переменная.

Конечно, сторона квадрата не может быть отрицательной и лишь условно можно считать, что она может быть равна 0. Тем не менее мы можем расширить область определения функции $y = x^2$ до множества всех чисел: $X = (-\infty; +\infty)$. Построим ее график для общего случая, используя приведенную выше таблицу и равенства $(-x)^2 = x^2$ и $0^2 = 0$.

Соединим отмеченные точки плавной кривой, которая и представляет собой график функции $y = x^2$, где x – любое число (рис. 1). Эта кривая располагается в первой и второй координатных четвертях ($y \geqslant 0$ при любом значении x) и называется ***параболой***, а ее точка (0; 0) называется ***вершиной параболы***.

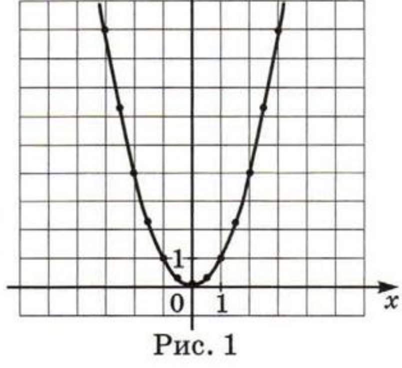


Рис. 1

Сформулируем **свойства функции $y = x^2$ и ее графика.** Заметим, например, что при увеличении x по модулю значение y, оставаясь положительным, возрастает значительно «быстрее», чем x. Так, при увеличении $|x|$ от 1 до 10 значение y увеличивается с 1 до 100. При уменьшении по модулю числа x число y, оставаясь положительным, наоборот, уменьшается значительно «быстрее», чем x. Если $x = 0{,}1$, то $y = 0{,}01$; если $x = 0{,}01$, то $y = 0{,}0001$ и т.д.

Из этого следует, что при удалении от начала координат ветви параболы резко поднимаются вверх и, выбрав единичный отрезок в 1 см, уже при $x = 6$ мы не сможем отметить значение функции $y = x^2$ на стандартном листе А4. И, наоборот, приближаясь к вершине, парабола все ближе «прижимается» к оси абсцисс (в отличие от графика $y = |x|$, который имеет в точке (0; 0) «уголок»).

Свойство 1. При удалении от начала координат график функции $y = x^2$ круто поднимается вверх, а приближаясь к вершине, «прижимается» к оси абсцисс.

* * *

Определение. *Касательной* к параболе $y = x^2$ называется прямая, не параллельная оси ординат и имеющая с параболой ровно одну общую точку.

Ось абсцисс имеет с параболой $y = x^2$ единственную общую точку – начало координат; ось абсцисс не параллельна оси ординат. Поэтому ось абсцисс – касательная к параболе $y = x^2$ в ее вершине.

Свойство 2. График $y = x^2$ касается оси абсцисс в начале координат.

Если провести карандашом по графику $y = x^2$ слева направо, то до начала координат мы как бы «спускаемся с горы», а после начала координат мы «пойдем в гору». То есть на промежутке $(-\infty; 0]$ с увеличением значений x значения функции уменьшаются (говорят, что функция на этом промежутке ***убывает***). А на промежутке $[0; +\infty)$, наоборот, с увеличением значений x значения функции тоже увеличиваются (говорят, что функция на этом промежутке ***возрастает***).

Свойство 3. На промежутке $(-\infty; 0]$ функция $y = x^2$ убывает, а на промежутке $[0; +\infty)$ – возрастает.

При противоположных значениях аргумента функция принимает одинаковые значения. Поэтому график данной функции симметричен относительно оси Oy (рис. 1). Такие функции называют *четными* функциями.

Свойство 4. Функция $y = x^2$ является четной, ее график симметричен относительно оси ординат.

* * *

Определение. Функция называется четной, если при замене знака ее аргумента значение функции не меняется.

$$\forall\, x \in X\colon f(-x) = f(x), \text{ где } X \text{ – область определения функции}$$

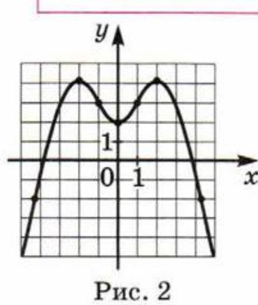


Рис. 2

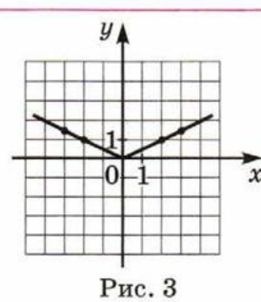


Рис. 3

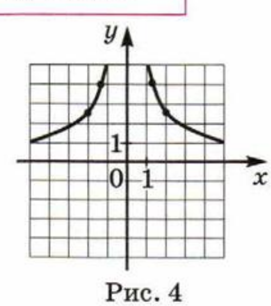


Рис. 4

Если график четной функции содержит точку плоскости с координатами $(x; y)$, то он содержит и точку $(-x; y)$. Это означает, что график любой четной функции симметричен относительно оси ординат. Примеры графиков четных функций приведены на рис. 2–4.

Анализируя зависимость объема куба V от длины его ребра a, перейдем к рассмотрению функции $y = x^3$, распространив область определения, как и в предыдущем случае, на множество всех чисел: $X = (-\infty; +\infty)$.

Заполним таблицу, учитывая, что $(-x)^3 = -x^3$.

x	0	$\pm 0{,}5$	± 1	$\pm 1{,}5$	± 2	± 3
y	0	$\pm 0{,}125$	± 1	$\pm 3{,}375$	± 8	± 27

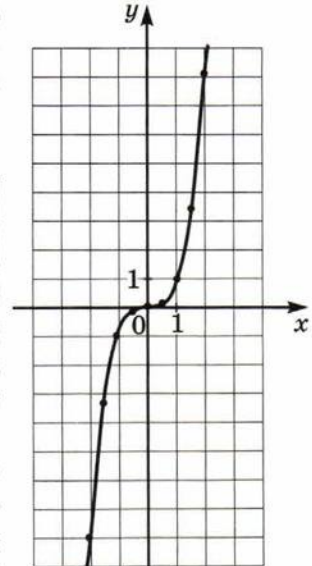


Рис. 5

Отметим на рисунке точки, указанные в таблице, и соединим их плавной кривой. Получим график функции $y = x^3$, который мы будем называть ***кубической параболой*** (рис. 5). Кубическая парабола располагается в I и III координатных четвертях (знак y всегда совпадает со знаком x).

Сформулируем **свойства функции $y = x^3$ и ее графика.** Заметим вначале, что при неограниченном увеличении $|x|$ значение $|y|$ возрастает еще «быстрее», чем у параболы. Так, при увеличении $|x|$ от 1 до 10 значение $|y|$ увеличивается с 1 до 1000 (у параболы с 1 до 100). А уже при $x = 3$ на рисунке не умещается значение $y = 27$.

Аналогично при уменьшении $|x|$ значение $|y|$ уменьшается значительно «быстрее», чем у параболы. Например, если $x = 0{,}1$, то $y = 0{,}001$; если $x = 0{,}01$, то $y = 0{,}000001$. В силу этого ветви кубической параболы еще более крутые, чем у параболы, а при приближении к началу координат кривая $y = x^3$ еще более тесно «прижимается» к оси абсцисс, чем парабола $y = x^2$.

Свойство 1. При удалении от начала координат кубическая парабола поднимается вверх еще круче, а при приближении к началу координат – «прижимается» к оси абсцисс еще ближе, чем обычная парабола.

В этом случае также говорят, что график касается оси абсцисс в начале координат, но здесь касание происходит более хитро: касательная протыкает график (одна часть графика лежит по одну сторону от касательной, другая – по другую сторону). Как говорят, график имеет в начале координат ***перегиб*** относительно оси абсцисс. Следует отметить, что такое определение касательной, с которым мы сталкивались раньше, годится только для некоторых очень простых кривых линий (окружность, парабола). С определением касательной для более сложных случаев мы сможем познакомиться позже, нам оно пока недоступно. Отметим лишь, что касательная к графику $y = x^3$ может, помимо точки касания, иметь и другую общую точку с графиком, в которой она пересекает его.

Свойство 2. Кубическая парабола имеет перегиб в начале координат.

Если двигаться по графику $y = x^3$ слева направо, мы «пойдем в гору»: с увеличением значений x значения функции $y = x^3$ увеличиваются. Другими словами, функция $y = x^3$ возрастает на всей области определения. Такие функции называются ***возрастающими***. Функции, которые убывают на всей области определения, называются ***убывающими***.

Свойство 3. Функция $y = x^3$ является возрастающей на всей области определения $X = (-\infty; +\infty)$.

При противоположных значениях аргумента значения функции также противоположны, так как $(-x)^3 = -x^3$. Поэтому график данной функции симметричен относительно начала координат (рис. 7). Такие функции называют *нечетными* функциями.

Свойство 4. Функция $y = x^3$ является нечетной, ее график симметричен относительно начала координат

* * *

Определение. Функция называется нечетной, если при замене знака ее аргумента значение функции изменяет свой знак.

$\forall\, x \in X\colon f(-x) = -f(x)$, где X – область определения функции

Если график нечетной функции содержит точку плоскости с координатами $(x; y)$, то он содержит и точку $(-x; -y)$. Это означает, что график любой нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Примеры графиков нечетных функций приведены на рис. 6–9.

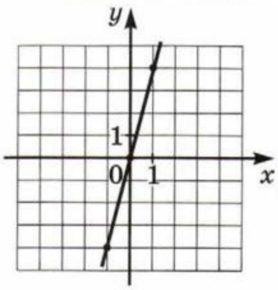


Рис. 6

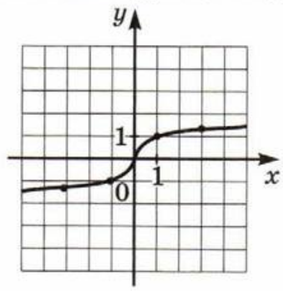


Рис. 7

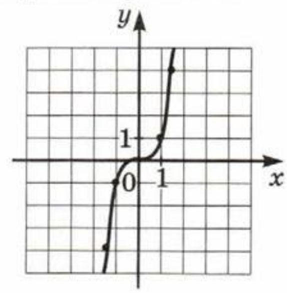


Рис. 8

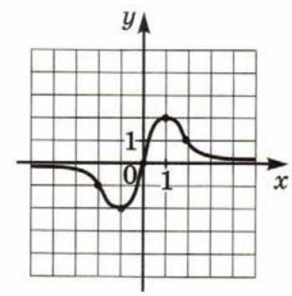


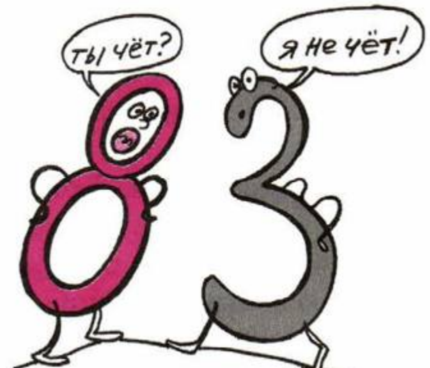
Рис. 9

Обратим внимание на то, что функция $y = x^2$ – четная, а функция $y = x^3$ – нечетная. Связано ли это с тем, что 2 – четное число, а 3 – нечетное? Оказывается, связано! Попробуем установить эту взаимосвязь, рассмотрев обобщенную *степенную* функцию $y = x^n$, где n – произвольное натуральное число.

Определение. Функцию вида $y = x^n$, где $n \in N$, называют **степенной функцией с натуральным показателем.** (Далее для простоты такие функции мы будем называть просто степенными функциями.)

Четные степени противоположных чисел равны: $(-x)^2 = x^2$, $(-x)^4 = x^4$, $(-x)^6 = x^6$ и т.д. Поэтому функция $y = x^n$ с любым четным коэффициентом $n = 2, 4, 6$ и т.д., подобно функции $y = x^2$, четная.

Напротив, нечетные степени противоположных чисел противоположны: $(-x)^3 = -x^3$, $(-x)^5 = -x^5$, $(-x)^7 = -x^7$ и т.д. Значит, функция $y = x^n$ с любым нечетным коэффициентом $n = 3, 5, 7$ и т.д., подобно функции $y = x^3$, нечетная (при $n = 1$ функция $y = x^1$ или $y = x$, также нечетна).



Именно отсюда и произошли термины «четная функция» и «нечетная функция». Однако свойством четности или нечетности обладают и функции, которые не являются степенными. Так, известная нам функция $y = |\,x\,|$ является четной, хотя она не содержит никакой четной степени. Существуют также функции, которые не являются ни четными, ни нечетными. Примером такой функции служит линейная функция $y = kx + b$, где $k, b \neq 0$.

* * *

Какими же еще свойствами обладают степенные функции и их графики?

Все графики функций $y = x^n$ при четном n имеют примерно такой же вид, как парабола $y = x^2$, а при нечетном – как кубическая парабола $y = x^3$, но при этом существенно отличаются от них.

Действительно, с увеличением показателя n при неограниченном увеличении $|x|$ соответствующие значения $|y|$ возрастают еще более резко, чем для функций $y = x^2$ и $y = x^3$. И, наоборот, при неограниченном уменьшении $|x|$ соответствующие значения $|y|$ уменьшаются значительно быстрее, чем для функций $y = x^2$ и $y = x^3$. Поэтому чем больше n, тем «круче» становятся ветви графика и тем «теснее прижимается» он к оси абсцисс в начале координат.

Если n четное, то функции $y = x^n$ подобно функции $y = x^2$ убывают при $x \in (-\infty; 0]$, возрастают при $x \in [0; +\infty)$ и касаются оси абсцисс в начале координат. А если n нечетное, то функции $y = x^n$, как и $y = x^3$, являются возрастающими на всей числовой прямой $(-\infty; +\infty)$ и имеют в начале координат перегиб.

Графики всех степенных функций проходят через начало координат $(0; 0)$ и точку $(1; 1)$. Их симметричность зависит от четности показателя.

Построим для примера график функции $y = x^4$. Функция четная, поэтому достаточно составить таблицу для неотрицательных значений x и воспользоваться симметрией графика относительно оси ординат.

x	0	0,5	1	1,5	2
y	0	0,0625	1	5,0625	16

Отметим на графике точки и соединим их плавной линией. Мы видим, что график по форме напоминает параболу со всеми ее свойствами, но это – не парабола: у данного графика более «сжатый» и «приплюснутый» вид (рис. 10).

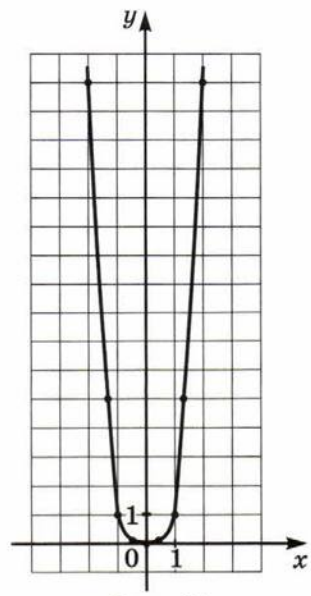


Рис. 10

Анализируя шаги, предпринятые нами для построения графиков степенных функций и свойства этих функций, можем записать следующий алгоритм.

Алгоритм построения графика функции $y = x^n$, $n \in N$

1. Заполнить таблицу, задав несколько положительных значений x и вычислив соответствующие им значения y по формуле $y = x^n$.

x	0	1			
y	0	1			

2. Отметить точки с координатами $(x; y)$, полученными в таблице.
3. Для четного n построить точки, симметричные отмеченным относительно оси ординат, они имеют координаты $(-x; y)$. Для нечетного n построить точки, симметричные отмеченным относительно начала координат $(-x; -y)$.
4. Соединить полученные точки плавной линией, учитывая, что чем больше n, тем теснее «прижимается» график к оси абсцисс в начале координат.

К **1** Найдите значение выражения (устно):

а) a^2, если $a = 0,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 1,\ -1,\ 7,\ -7$;

б) b^3, если $b = 0,\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ 1,\ -1,\ 4,\ -4$.

2 Расположите положительные значения выражений в порядке возрастания. Что означает понятие, полученное в ответе?

У	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	**В**	$(-4)^3$	**К**	2^3	**Ф**	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	**Ц**	$(-3)^2$	**Я**	5^4
		И	$(-5)^2$	**Н**	2^2			**А**	$(-2)^3$	**Д**	-1^8

3 1) Запишите формулу зависимости площади квадрата S в см^2 от длины стороны a в см.

2) Если задуманное число b умножить на само себя, то получится число r. Запишите формулу зависимости числа r от b.

3) Участок перед домом имеет форму квадрата. Длина участка равна h метров. Площадь готового рулонного газона для этого участка составила G м^2. Запишите формулу зависимости площади газона G в м^2 от длины участка h м.

4) Запишите формулу, с помощью которой можно вычислить квадрат целого числа, обозначив это число буквой z, а его квадрат – c.

5) Что общего во всех построенных вами формулах? Запишите их всех с помощью одной формулы. Является ли эта зависимость функциональной?

6) Задайте эту функцию таблично:

x	0	0,5	−0,5	1	−1	2	−2	3	−3	4	−4
y											

Нужно ли, вычислив значение функции от числа x, вычислять значения функции от $-x$?

7) Постройте график функции, используя полученную таблицу. Сравните его с графиком, изображенным на стр. 3 учебника. Прочитайте в учебнике, как называется полученная кривая.

8) Какие свойства графика вы можете отметить? Сопоставьте их со свойствами на стр. 4 учебника. Какие из указанных в учебнике свойств вам удалось выявить самостоятельно?

4 1) Запишите формулу зависимости объема куба V в м^3 от длины стороны a в м.

2) Если задуманное число b дважды умножить на само себя, то получится число r. Запишите формулу зависимости числа r от b.

3) Аквариум имеет форму куба. Высота аквариума равна h дециметрам. Запишите формулу зависимости объема аквариума G в литрах от высоты аквариума h в дм.

4) Запишите формулу, с помощью которой можно вычислить куб целого числа, обозначив число буквой z, а его куб – c.

5) Что общего во всех построенных вами формулах? Запишите их всех с помощью одной формулы. Является ли эта зависимость функциональной?

6) Задайте эту функцию таблично:

x	0	0,5	−0,5	1	−1	1,5	−1,5	2	−2	3	−3
y											

Нужно ли, вычислив значение функции от числа x, вычислять значения функции от $-x$?

7) Постройте график функции, используя полученную таблицу. Сравните его с графиком, изображенным на стр. 5 учебника. Прочитайте в учебнике, как называется полученная кривая.

8) Какие свойства графика вы можете отметить? Сопоставьте их со свойствами на стр. 5–6 учебника. Какие из указанных в учебнике свойств вам удалось выявить самостоятельно?

5 Функция задана формулой $f(x) = x^8$. Сравните:

а) $f(5)$ и $f(3)$; в) $f(-5)$ и $f(-3)$; д) $f(-2{,}5)$ и $f(2{,}5)$; ж) $f(-\frac{1}{3})$ и $f(\frac{1}{4})$;

б) $f(-5)$ и $f(3)$; г) $f(0)$ и $f(-6{,}3)$; е) $f(0{,}4)$ и $f(1)$; з) $f(-31{,}2)$ и $f(32)$.

6 Функция задана формулой $f(x) = x^{11}$. Сравните:

а) $f(6{,}6)$ и $f(8)$; в) $f(-15{,}4)$ и $f(-10{,}1)$; д) $f(3{,}2)$ и $f(-3{,}2)$; ж) $f(\frac{1}{8})$ и $f(\frac{1}{10})$;

б) $f(6)$ и $f(-8{,}5)$; г) $f(-3)$ и $f(0)$; е) $f(0{,}2)$ и $f(0{,}7)$; з) $f(-0{,}3)$ и $f(-1)$.

7 Изобразите схематически график функции $y = x^4$. Как вы думаете, какое минимальное и максимальное значение функции на отрезке:

а) $[-1; 1]$; б) $[-3;3]$; в) $[0; 2]$?

8 Изобразите схематически график функции $y = x^7$. Как вы думаете, какое минимальное и максимальное значение функции на отрезке:

а) $[-1; 1]$; б) $[0; 2]$; в) $[-2;1]$?

Укажите, на каких промежутках из области определения функция положительна, отрицательна.

9 Первая координатная четверть представлена на листе формата А4 в масштабе 1 единица в 1 см. Оцените, при каком наибольшем натуральном n на листе поместится точка графика $y = x^n$: а) с абсциссой 1,5; б) с абсциссой 1,2.

10 Приведите пример четной функции, пример нечетной функции. Может ли функция быть одновременно и четной, и нечетной?

11 Какие из указанных функций являются четными, какие нечетными, а какие ни теми, ни другими?

а) $y = x^2$; д) $y = 13x^4 - x^{10}$; и) $y = |x|$;
б) $y = x^5$; е) $y = x^3 - x$; к) $y = x^2 - 5x + 6$;
в) $y = 2x^2 + 5x^6$; ж) $y = x^7 - 7$; л) $y = -x$;
г) $y = x^8 + 5$; з) $y = -3x + 3$; м) $y = 0{,}2x^9 + 0{,}8x^{11}$.

Заполните таблицу:

Четные функции	Нечетные функции	Функции, не являющиеся ни четными, ни нечетными

12 Изобразите схематически графики функций с заданной областью определения. Исследуйте эти функции на четность.

а) $y = x^2$, $x \in [-4; 4]$; д) $y = x$, $x \in (-3;3]$;
б) $y = x^4$, $x \in [-2; 2]$; е) $y = x^3$, $x \in [-2; 0]$;

в) $y = x^6$; $x \in (-3;3)$;

г) $y = x^8$; $x \in [-1; 1)$;

ж) $y = x^5$, $x \in [0; +\infty)$;

з) $y = x^7$, $x \in (-\infty; +\infty)$.

Проанализируйте результаты своей работы, обращая внимание на симметричность области определения данных функций. Предположите, каким свойством должна обладать область определения четной или нечетной функции?

13 Среди функций с заданной областью определения укажите четные функции, а затем нечетные функции. Функции с какой областью определения целесообразно проверять? Сделайте вывод.

а) $y = x^{10}$, $x \in [-1; 1]$;

б) $y = x^{12}$, $x \in (-\infty; 1]$;

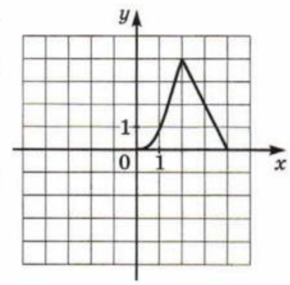
в) $y = x^2$, $x \in (-\infty; +\infty)$;

г) $y = x^9$, $x \in [-3; -1]$;

д) $y = x^{11}$, $x \in (-\infty; +\infty)$;

е) $y = |x|$, $x \in [-2; 3]$.

14 На рисунке построена часть графика функции $y = f(x)$ с областью определения: $[-4; 4]$. Дополните график, если известно, что $y = f(x)$ – четная функция.

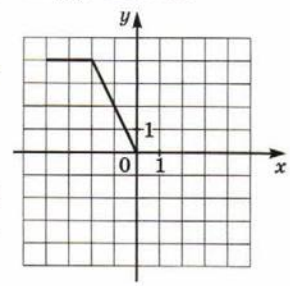


1) Найдите $f(-1)$, $f(-2)$, $f(-4)$.

2) Выделите красным цветом часть кривой, на которой функция возрастает.

3) Укажите, при каких значениях x функция возрастает.

15 На рисунке построена часть графика функции $y = f(x)$ с областью определения $[-4; 4]$. Дополните график, если известно, что $y = f(x)$ – нечетная функция.



1) Найдите $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$.

2) Выделите красным цветом часть кривой, на которой функция убывает.

3) Укажите, при каких значениях x функция убывает.

4) Выделите зеленым цветом часть кривой, на которой функция постоянна. Укажите, при каких значениях x функция постоянна.

16 Постройте графики функции $y = x^2$ и $y = x^3$.
«Прочитайте» каждый график по следующему плану:

1) Укажите область определения функции: $D(y)$.

2) Если возможно, укажите область значений функции: $E(y)$.

3) Пользуясь симметрией области определения функции, выясните, может ли функция являться четной или нечетной. Если может, докажите ее четность либо нечетность.

4) Укажите, на каких промежутках из области определения функция равна 0, положительна, отрицательна.

5) Укажите, на каких промежутках из области определения функция возрастает (убывает, постоянна).

6) Если возможно, укажите наибольшее, наименьшее значение функции.

17 Постройте график функции с заданной областью определения. «Прочитайте» график по плану.

а) $y = x^{14}$, $x \in (-\infty; +\infty)$;

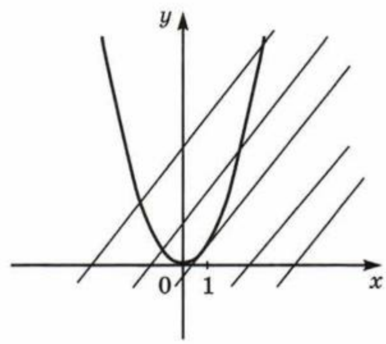
д) $y = x^{11}$, $x \in (-1; 1]$;

б) $y = x^6$, $x \in (-1; 1)$;
в) $y = x^4$, $x \in [1; 2)$;
г) $y = x^2$, $x \in [-3; 1]$;
е) $y = x^5$, $x \in [-1; +\infty)$;
ж) $y = x^9$, $x \in (-\infty; -1]$;
з) $y = x^3$, $x \in [-2; -1) \cup [1; 2)$.

18 Постройте графики $y = x^2$, $x = 0$, $x = 3$, $x = 5$, $y = 0$, $y = 3$, $y = -5$, $y = 5x$ и ответьте на вопросы.

а) Сколько общих точек имеют эти прямые с параболой?
б) Какие из прямых имеют с параболой только одну общую точку? Все ли из них являются касательными?

Докажите, что любая прямая, параллельная оси ординат, пересекает параболу ровно в одной точке.



19 Проанализируйте рисунок и ответьте на вопросы.

а) На какие группы можно разбить эти прямые?
б) Какая из этих прямых является касательной к параболе?

Сравните определение касательной к параболе и касательной к окружности, известное из курса геометрии. Чем они отличаются?

20 Сколько общих точек имеют графики функций:

а) $y = x^3$ и $y = 0$; б) $y = x^3$ и $y = 8$; в) $y = x^3$ и $y = -8$?

21 Может ли прямая:

а) пересечь график функции $y = x^3$ в трех различных точках;
б) пересечь график функции $y = x^3$ ровно в одной точке?

22 Постройте в одной координатной плоскости графики функций:

а) $y = x^2$ и $y = 1$; б) $y = x^2$ и $y = x$; в) $y = x^2$ и $y = 2x - 1$.

Сколько общих точек имеют графики функций? Укажите, при каком значении аргумента значения функций совпадают.

23 Воспользовавшись результатами выполнения предыдущего задания, решите уравнение:

а) $x^2 = 1$; б) $x^2 = x$; в) $x^2 = 2x - 1$.

24 Решите графически уравнение:

а) $x^3 = -1$; б) $x^2 = 4x - 3$; в) $x^5 = x$; г) $x^6 = |x|$.

25 Докажите, что при всех значениях x: а) $|x|^2 = x^2$; б) $|x|^3 = |x^3|$.

26 Докажите, что:

а) сумма и произведение четных функций – четные функции;
б) сумма нечетных функций – нечетная функция;
в) произведение нечетных функций – четная функция.

Можно отметить связь этих утверждений с теми фактами, что сумма двух четных или двух нечетных чисел – четное число. Попробуйте отразить на языке четности или нечетности функций те факты, что произведение двух четных чисел – четное число, а произведение двух нечетных чисел – нечетное число.

27 Без помощи калькулятора сравните рациональные числа:

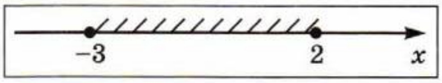
а) $0{,}59$ и $\frac{7}{12}$; в) $0{,}(76)$ и $0{,}767$; д) $0{,}(62)$ и $\frac{13}{21}$;

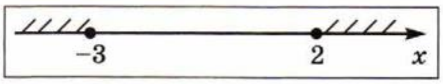
б) $-\frac{7}{15}$ и $-0{,}(45)$; г) $-0{,}384$ и $-0{,}(38)$; е) $-0{,}1(7)$ и $-\frac{1}{6}$.

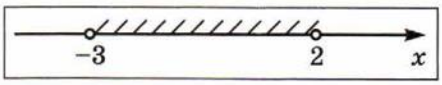
28 Определите, при каких значениях переменных имеют смысл выражения:

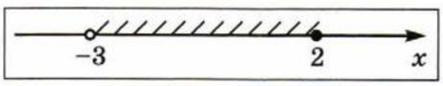
а) $-\frac{1}{x}$; б) $\frac{a-1}{(a+1)(a-1)}$; в) $\frac{2mn}{(2n-5)}:\frac{(m+1)}{3mn}$.

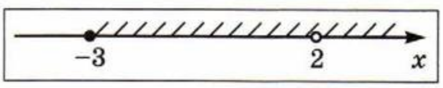
29 Установите соответствие между изображением числового промежутка на числовой прямой и его аналитической записью.

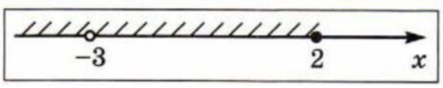
а) 

б) 

в) 

г) 

д) 

е) 

1) $(-\infty; -3) \cup (-3; 2]$

2) $(-3; 2]$

3) $[-3; 2]$

4) $[-3; 2) \cup (2; +\infty)$

5) $(-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$

6) $(-3; 2)$

30 Постройте график функции $y = -2x + 3$. С помощью графика найдите значения, при которых точки графика лежат:

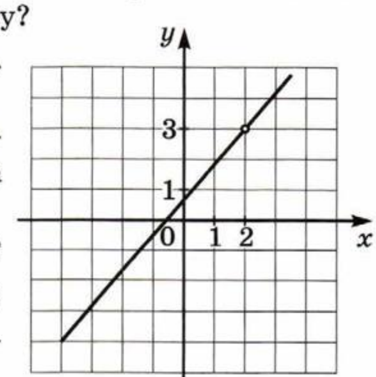
а) выше оси абсцисс; в) выше прямой $y = 1$;

б) ниже оси абсцисс; г) ниже прямой $y = 3$.

Проверьте полученные вами результаты, составив и решив соответствующие неравенства.

31 Решите неравенство $4(-2x + 1) + 4x < 16$. Из множества решений данного неравенства удалите все целые числа, значения которых больше 0, но меньше 4. Проиллюстрируйте полученное множество на числовой прямой. Каким образом вы отметили, что числа 1, 2, 3 не принадлежат данному множеству?

32 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. На графике «выколота» точка с координатами (2; 3).



Вспомните смысл «выколотой точки» на схеме, изображающей множество решений неравенства, и ответьте на вопросы:

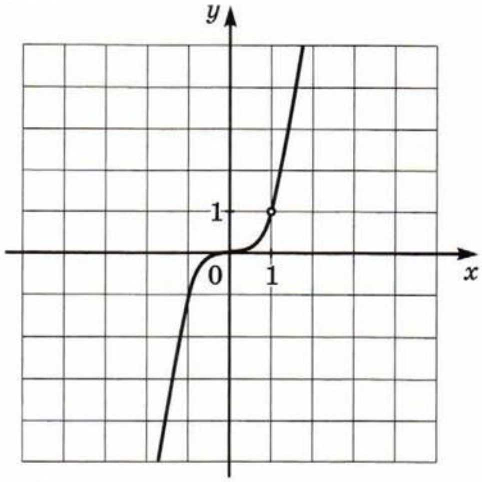
1) Входит ли $x = 2$ в область определения данной функции?

2) Входит ли $y = 3$ в область значений данной функции?

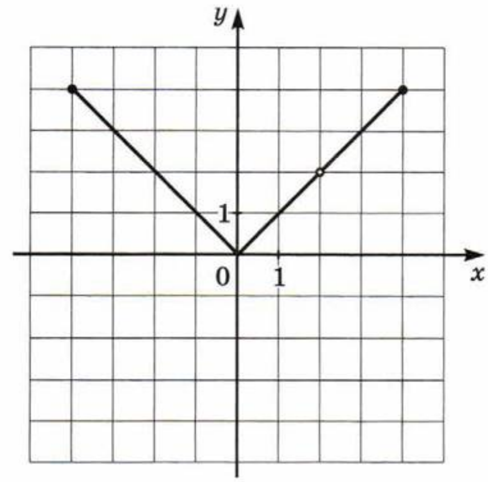
3) Какова область определения и область значений данной функции?

33 Найдите область определения функций, графики которых изображены на рисунках а–г.

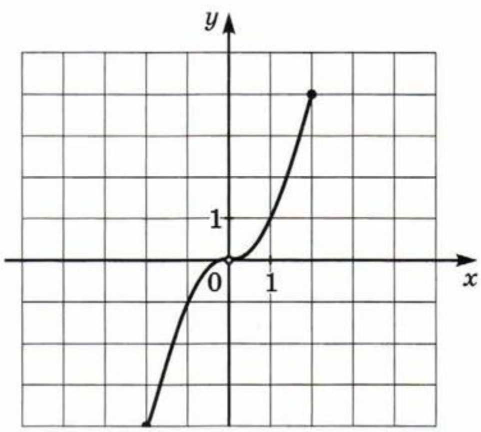
а)



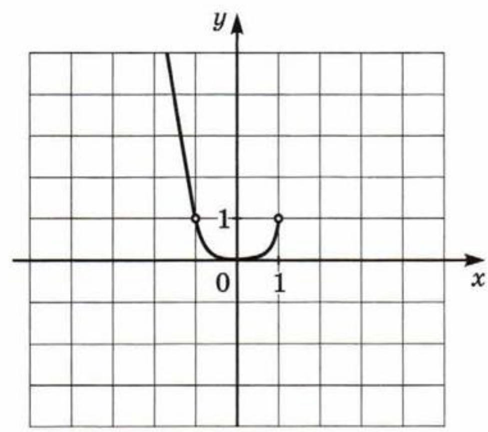
в)



б)



г)



Д **34** Функция задана формулой $f(x) = x^2$. Постройте график данной функции и «прочитайте» его по плану. Как называется построенная кривая?

35 Функция задана формулой $f(x) = x^2$. Сравните:

а) $f(0{,}005)$ и $f(-0{,}005)$;
в) $f(0)$ и $f(-3{,}0008)$;
б) $f(200)$ и $f(-500)$;
г) $f\left(-\frac{3}{4}\right)$ и $f\left(\frac{1}{8}\right)$.

Целесообразно ли использовать для сравнения график функции?

36 Функция задана формулой $f(x) = x^3$. Сравните:

а) $f(-3)$ и $f(2)$; б) $f(3{,}7)$ и $f(7{,}3)$; в) $f(-1)$ и $f(0)$; г) $f\left(-\frac{1}{28}\right)$ и $f\left(\frac{1}{28}\right)$.

Постройте график данной функции и «прочитайте» его. Как называется построенная кривая?

37 Изобразите схематически график функции $y = x^8$. Найдите наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке $[-2; 1]$.

38 Изобразите схематически график функции $y = x^5$. Найдите наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке $[-1; 2]$.

39 Сколько общих точек имеют графики функций:

а) $y = x^3$ и $y = x^4$; б) $y = x^4$ и $y = x^6$; в) $y = x^5$ и $y = x^6$?

40 Решите графически уравнение:

а) $x^2 = -3x - 2$; б) $x^3 = -x$; в) $x^8 = 1$; г) $x^5 = -|x|$.

41 Может ли прямая: а) пересечь график функции $y = x^5$ в трех различных точках; б) пересечь график функции $y = x^5$ в двух различных точках?

42 Разбейте функции на группы и заполните таблицу:

а) $y = x^4$; д) $y = 8x^6 - x^3$; и) $y = -|x|$;

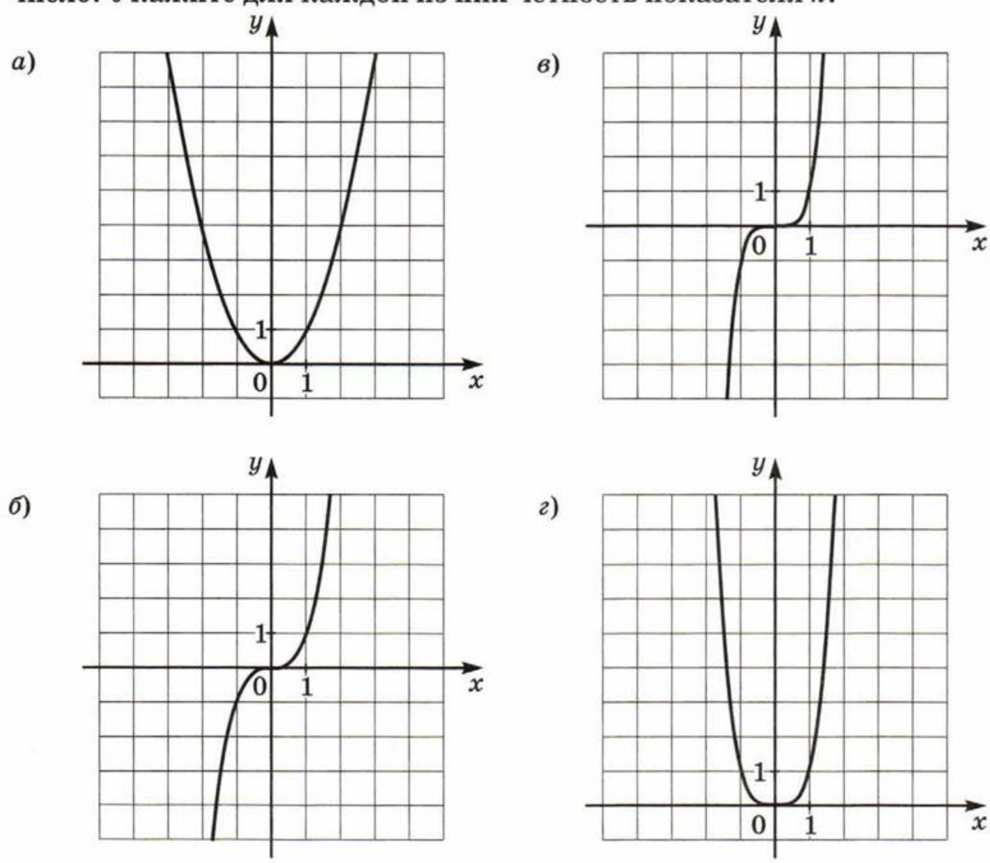
б) $y = x^4 + 3$; е) $y = x^5 - x^3$; к) $y = x^4 - 5x^2 + 6$;

в) $y = 10{,}2x^6 - 3x^2$; ж) $y = x^9 - 3$; л) $y = x$;

г) $y = (x + 5)^8$; з) $y = -5x$; м) $y = 2x^7 - x^3 + x$.

Четные функции	Нечетные функции	Функции, не являющиеся ни четными, ни нечетными

43 Даны графики нескольких степенных функций вида $y = x^k$, где k – натуральное число. Укажите для каждой из них четность показателя k.

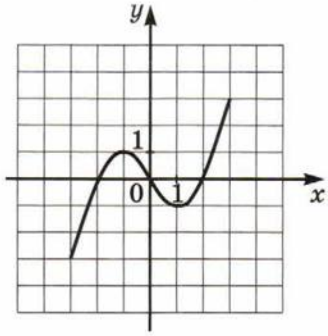


44 Докажите, что модуль четной функции и модуль нечетной функции являются четными функциями.

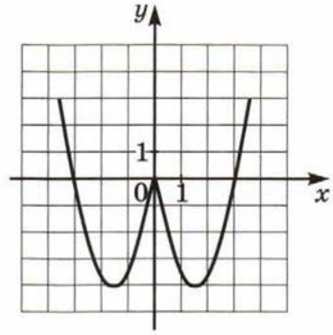
45 Какие из графиков функций, изображенных на рис. а–е, являются графиками:

1) четных функций;
2) нечетных функций;
3) функций, не являющихся ни четными, ни нечетными?

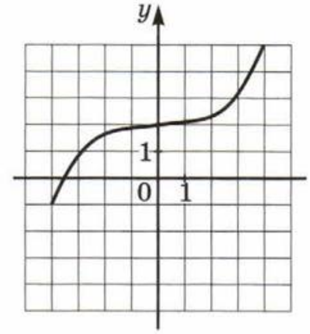
а)



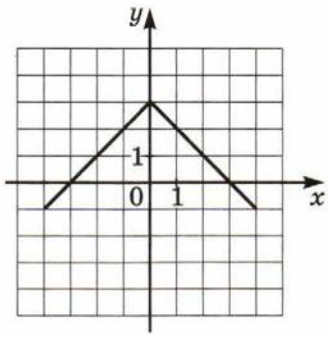
б)



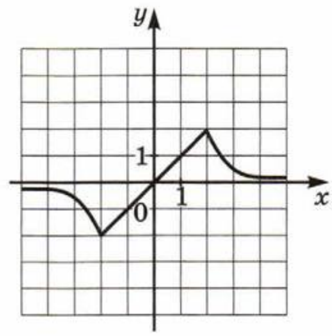
в)



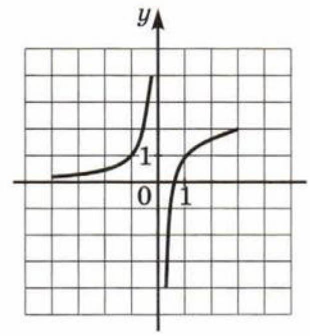
г)



д)



е)



46 Определите, при каких значениях переменных имеют смысл выражения:

а) $\dfrac{1}{2a\cdot 5b}$;

б) $\dfrac{x+1}{2}$;

в) $\dfrac{2}{x+1}$;

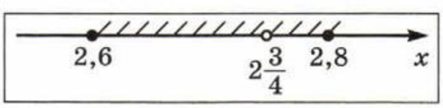
г) $\dfrac{3}{a(2a-1)}$;

д) $\dfrac{1}{(2-y)(y+1)}$;

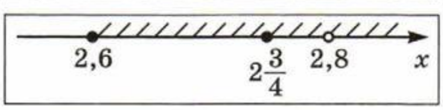
е) $\dfrac{1}{5x^2y^5}-\dfrac{1}{(x-2)(y+3)}$.

47 Установите соответствие между изображением числового промежутка на числовой прямой и его аналитической записью.

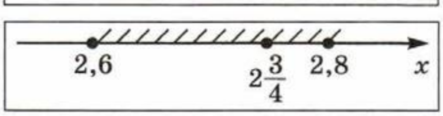
а)



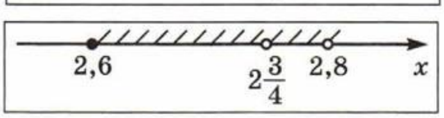
б)



в)



г)



1) $\left[2{,}6;\, 2\frac{3}{4}\right)\cup\left(2\frac{3}{4};\, 2{,}8\right)$

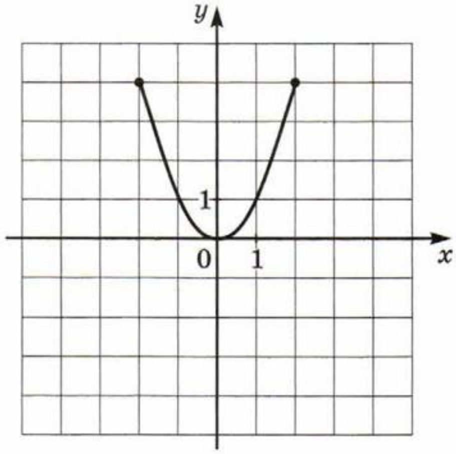
2) $\left[2{,}6;\, 2{,}8\right)\cup\left(2{,}8;\, +\infty\right)$

3) $[2{,}6;\, 2{,}8]$

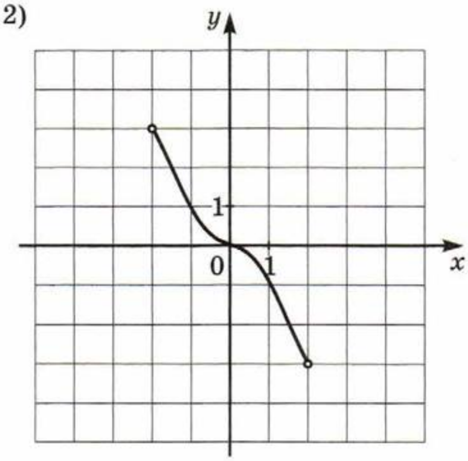
4) $\left[2{,}6;\, 2\frac{3}{4}\right)\cup\left(2\frac{3}{4};\, 2{,}8\right]$

48 Установите соответствие между графиками функции $y = f(x)$, изображенными ниже, и указанными областями определения.

1)



2)



а) $(-2; 2)$;

б) $[-2; 2]$.

C **49*** Докажите, что при любом натуральном n число $n^3 + 3n^2 + 6n + 8$ является составным.

2. Обратная пропорциональность и ее график

Понятия приобретаются чувствами, врожденным – не должно верить.

Николай Иванович Лобачевский (1792–1856), русский математик

В предыдущем пункте мы описали зависимости между величинами, которые можно обнаружить на практике, измеряя длину, площадь и объем реальных фигур. Описав их в общем виде, мы выявили свойства полученных функций, что позволило нам не только обобщить и систематизировать способы решения множества практических задач, связанных зависимостью подобного рода, но и познакомиться с другими функциями, обладающими аналогичными свойствами.

Рассматривая эти функции, мы абстрагировались от практической их стороны и основное внимание уделили исследованию связей между переменными. Тем самым мы начинаем осваивать новый метод познания – *абстракция*. Суть его заключается в познании реальных процессов путем выделения основных, наиболее существенных их сторон в отвлечении от всего внешнего, второстепенного, случайного, несущественного. Часто результатом применения абстракции является вывод новых законов. Именно таким способом были сделаны многие научные открытия, например, революционная для начала XIX века неевклидова геометрия Н. И. Лобачевского. Открытие Лобачевского не было признано его современниками, однако ни стена непонимания, ни насмешки не остановили великого русского математика. Опередив свое время, его теория нашла свое практическое применение только во второй половине XX века, став одним из необходимых условий, например, полета человека в космос.

Ранее посредством обобщения закономерностей таких процессов, как движение, покупка товаров, работа и пр., мы вывели формулу произведения $a = bc$, дающую общее описание формул движения $s = vt$, стоимости $C = an$, работы $A = wt$ и пр. В результате абстрагирования от практики нами была исследована функция $y = kx$ – прямая пропорциональность, описывающая зависимость y от x при одном постоянном множителе в формуле $a = bc$ (множителе b или c, который мы обозначили k). Благодаря этому, мы установили для всех без исключения процессов данного вида различные свойства их протекания, которые мы смогли затем использовать при решении практических задач: например, то, что при увеличении (уменьшении) одной величины в несколько раз, другая увеличивается (уменьшается) во столько же раз.

Однако взаимосвязь между величинами вида $a = bc$ в случае постоянного значения произведения a осталась без подобного обобщенного исследования. В данном пункте мы заполним этот пробел.

Пусть величина a принимает постоянное значение – например:

✓ на одном и том же участке пути объекты движутся с разной скоростью;

✓ на фиксированную сумму денег покупается товар по разной цене;

✓ заданный объем работы выполняется с разной производительностью.

Если в каждом подобном процессе значение постоянной величины a обозначить буквой k, а значения двух других величин – x и y, то зависимость y от x можно записать в виде $y = \frac{k}{x}$. Данная зависимость, как мы уже знаем, называется *обратной пропорциональностью*, а число k называется *коэффициентом обратной пропорциональности.*

Очевидно, что величины, связанные обратной пропорциональностью, не могут принимать нулевые значения ($k = x \cdot y \neq 0$). Действительно, на практике никакое движение не может осуществляться на нулевом расстоянии и нельзя произвести покупку на 0 рублей.

Само название «обратная пропорциональность» связано с тем, что, в соответствии с равенством $x \cdot y = k$, если $x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = k$, то $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_2}{x_1}$ («обратная пропорция»).

Из полученной пропорции, в частности, следует известное нам свойство величин, связанных обратной пропорциональной зависимостью: с увеличением (уменьшением) значений одной величины в несколько раз значения другой величины соответственно уменьшаются (увеличиваются) во столько же раз. Например, если скорость автомобиля в 10 раз *больше* скорости пешехода, то на путь s он потратит в 10 раз *меньше* времени, чем пешеход; а если скорость пешехода в 3 раза *меньше* скорости велосипедиста, то на путь s он потратит в 3 раза *больше* времени, чем велосипедист.

Нетрудно убедиться, что обратная пропорциональность является функциональной зависимостью: каждому значению x, не равному нулю, соответствует единственное значение y. Ясно, что значения величин во всех рассмотренных процессах принимают лишь положительные значения. Однако существуют величины, значения которых могут быть и отрицательными. Поэтому естественно, как и в случае степенной функции, абстрагироваться от реальных процессов и рассмотреть данную функцию на множестве всех допустимых значений переменной.

Уточним определение обратной пропорциональности и исследуем ее свойства.

Определение. Функцию вида $y=\frac{k}{x}$, где k – некоторое не равное нулю число, называют **обратной пропорциональностью.** Число k называется **коэффициентом** обратной пропорциональности.

Так как делить на нуль нельзя, то областью определения X функции $y=\frac{k}{x}$ являются все числа, отличные от нуля: $X=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

При изменении знака аргумента x на противоположный значение функции также меняется на противоположное:

$$f(-x)=\frac{k}{-x}=-\frac{k}{x}=-f(x)$$

Следовательно, данная функция нечетна, и ее график симметричен относительно начала координат.

Свойство 1. Обратная пропорциональность является нечетной функцией; график обратной пропорциональности симметричен относительно начала координат.

Построим график функции $y=\frac{k}{x}$, при $k=2$. Для этого составим таблицу соответствующих значений переменных x и y для положительных значений x.

x	0,4	0,5	0,8	1	2	2,5	4	5
у	5	4	2,5	2	1	0,8	0,5	0,4

Отметим полученные точки на координатной плоскости Oxy и соединим их плавной линией, а затем симметрично отобразим построенную кривую относительно начала координат.

Мы видим, что график функции $y=\frac{2}{x}$ состоит из двух ветвей. Одна ветвь лежит в I координатной четверти (для ее точек $x>0$, $y>0$); другая ветвь лежит в III координатной четверти (для ее точек $x<0$, $y<0$) (рис. 1). Эта кривая линия на плоскости, состоящая из двух ветвей, называется **гиперболой**.

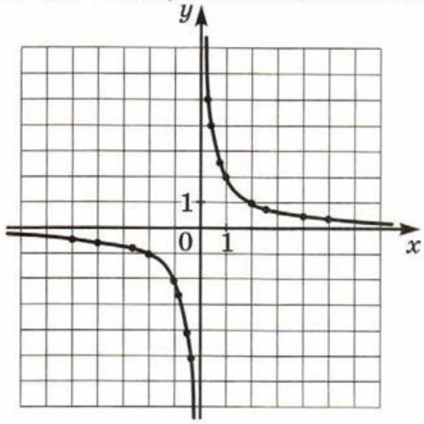


Рис. 1

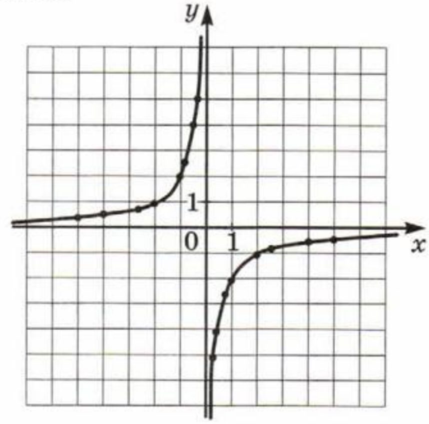


Рис. 2

Ясно, что такой же (расположенной в I и III координатных четвертях) гиперболой будет являться график функции $y=\dfrac{k}{x}$ при любом положительном значении k.

Если же $k<0$, то координаты любой точки $(x;\,y)$, лежащей на графике, имеют разные знаки: если $x>0$, то $y<0$; если $x<0$, то $y>0$. Поэтому графиком функции $y=\dfrac{k}{x}$ при любом отрицательном значении k является гипербола, лежащая во II и IV четвертях. На рис. 2 показан график функции $y=-\dfrac{2}{x}$.

Свойство 2. График $y=\dfrac{k}{x}$ состоит из двух ветвей. При $k>0$ они расположены в I и III координатных четвертях, а при $k<0$ – во II и IV координатных четвертях.

При очень малых значениях $|x|$ соответствующие значения $|y|$ будут очень велики, и наоборот. Например, для функции $y=\dfrac{2}{x}$, при $x=0{,}01$ значение $y=200$, при $x=0{,}001$, $y=2000$ и т.д. Наоборот, при $x=100$ значение $y=0{,}02$, при $x=1000$, $y=0{,}002$ и т.д. При противоположных значениях x значения y противоположны.

Это означает, что при малых по модулю значениях x график $y=\dfrac{k}{x}$ неограниченно приближается к оси ординат, но никогда к ней не прикасается и не пересекает ее ($x\neq 0$, $y\neq 0$). Если же значения модуля x неограниченно увеличиваются, то график $y=\dfrac{k}{x}$ неограниченно приближается к оси абсцисс. Такие прямые, к которым график функции неограниченно приближается, являются *асимптотами* данного графика.

Свойство 3. Ось ординат является вертикальной асимптотой графика $y=\dfrac{k}{x}$, а ось абсцисс – его горизонтальной асимптотой.

Если $k>0$, то каждая ветвь гиперболы идет вниз (с увеличением значений x значения y уменьшаются), а при $k<0$ – вверх (с увеличением x значения y увеличиваются). Значит, функция $y=\dfrac{k}{x}$ при $k>0$ убывает на каждом из промежутков $(-\infty;\,0)$ и $(0;\,+\infty)$, а при $k<0$ – возрастает.

Свойство 4. На промежутках $(-\infty;\,0)$ и $(0;\,+\infty)$ функция $y=\dfrac{k}{x}$ убывает при $k>0$ и возрастает при $k<0$.

В отличие от прямой пропорциональности, для построения которой достаточно знать положение двух ее точек, гипербола является более сложной линией, и для ее построения нужно изобразить как можно больше точек графика. Выявленные общие свойства позволяют сократить трудоемкость этого процесса и вместе с тем выполнить самопроверку построенного графика. Приведем пример.

Пример.

На рис. 3 восьмиклассник Саша проиллюстрировал, как изменяется длина y стороны прямоугольника площадью в 5 м^2 при увеличении другой его стороны x в несколько раз. Верно ли Саша построил график?

Решение. Описанная зависимость $y(x)$ является обрат-

Рис. 3

ной пропорциональностью $y=\frac{5}{x}$, поэтому ее график должен являться ветвью гиперболы, расположенной в I координатной четверти.

Однако кривая на рис. 3 имеет общую точку с осью абсцисс, что противоречит свойству 3. Этого достаточно, чтобы сделать вывод, что график построен неверно.

* * *

Отметим еще одно важное свойство обратной пропорциональности, которое помогает быстрее построить ее график и одновременно – проверить правильность своих построений.

Заметим, что если точка $(x;\ y)$ принадлежит графику функции $y=\frac{k}{x}$, то этому графику принадлежит и точка $(y;\ x)$:

$$y=\frac{k}{x} \Leftrightarrow x=\frac{k}{y}.$$

Легко видеть, что треугольник, образованный точками $(x;\ y)$, $(y;\ x)$ и началом координат $(0;\ 0)$, равнобедренный. Значит, его биссектриса – прямая $y = x$ – является одновременно и его осью симметрии. Поэтому любые две точки $(x;\ y)$ и $(y;\ x)$ гиперболы (и, следовательно, сама гипербола) симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов (рис. 4).

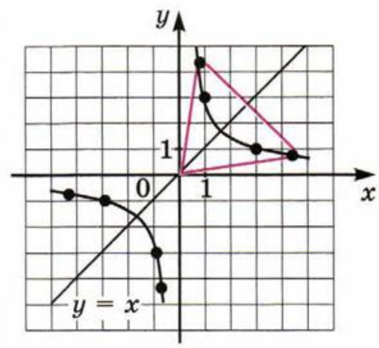


Рис. 4

Аналогично можно доказать, что гипербола симметрична и относительно биссектрисы II и IV координатных углов – прямой $y = -x$.

Свойство 5. Гипербола симметрична относительно прямых $y = x$ и $y = -x$.

Пользуясь этим свойством легко, установить, что, например, график, изображенный на рис. 5, не является графиком обратной пропорциональности, так как он не симметричен относительно прямой $y = x$.

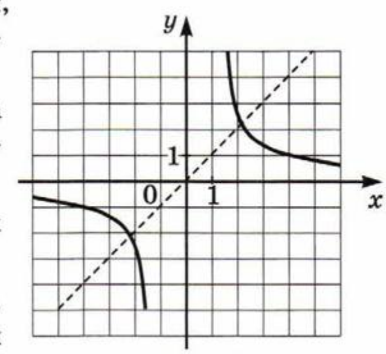


Рис. 5

Анализируя выявленные свойства гиперболы, можем записать следующий алгоритм построения графика функции $y=\frac{k}{x}$.

Алгоритм построения графика функции $y=\frac{k}{x}$

1. Заполнить таблицу, задав несколько положительных значений x и вычислив соответствующие им значения y по формуле $y=\frac{k}{x}$.
2. Отметить на координатной плоскости точки с координатами $(x;\ y)$, полученными в таблице.
3. Соединить полученные точки плавной линией, учитывая, что оси координат являются асимптотами данного графика.
4. По точкам с координатами $(-x;\ -y)$ построить вторую ветвь гиперболы, симметричную первой относительно начала координат.

* * *

В завершение построения графика полезно проверить его симметричность относительно прямых $y = x$ и $y = -x$.

К **50** Выберите из предложенных зависимостей те, которые являются прямой пропорциональностью, и укажите коэффициент пропорциональности. Для выбранных функций постройте графики.

а) $y = 5x$; в) $y = x : 5$; д) $y = 5x - 5$; ж) $y = (-0,5)^2x$;

б) $y = 5x^2$; г) $y = 0,5x$; е) $y = -1,5$; з) $y = x \cdot (-5)$.

Приведите примеры величин, связанных прямой пропорциональностью.

51 1) Запишите формулу зависимости времени движения в часах, затраченного на 2 км, от скорости движения в км/ч. Приведите примеры других величин, связанных аналогичной зависимостью. Является ли данная зависимость функциональной?

2) Запишите формулу зависимости количества яблок в кг, купленных на 150 рублей, от их цены в рублях. Приведите примеры других величин, связанных аналогичной зависимостью. Является ли данная зависимость функциональной?

3) Какой единой обобщенной формулой можно записать две предыдущие зависимости? Как называется эта зависимость? Какое ее свойство вам известно? Докажите, что эта зависимость является функцией.

4) Постройте график функции, описанной под цифрой 1, заполнив таблицу. Сравните его с графиком, изображенным на рисунке 1 стр. 18 учебника. Прочитайте, как называется полученная кривая.

5) Какие свойства графика вы можете отметить? Сопоставьте их со свойствами на стр. 18–19 учебника. Какие из указанных в учебнике свойств вам удалось выявить самостоятельно?

52 Обратная пропорциональность задана формулой $y = \dfrac{12}{x}$.

Найдите значение функции, соответствующее значению аргумента, равному 0,04; 0,12; 0,6; 30; 200; 2400.

Определите, принадлежит ли графику функции точка A (−2; 6); B (−0,5; −24); C ($\frac{3}{4}$;16); D ($\frac{6}{7}$; −14); F (−0,05; −240).

53 Задайте формулой обратную пропорциональность, если известно, что график функции проходит через точку:

а) M (1; −2); б) P (−3; −18); в) K ($\frac{1}{8}$; 200); г) Q (−10; 14); д) R ($\frac{4}{9}$; $-2\frac{1}{4}$).

54 Можно ли указать обратную пропорциональность, график которой проходит через следующие две точки плоскости:

а) A (1; 3), B (−2; 1); в) A (1; 3), B (−3; 1); д) A (−2; −2), B (−4; 1);

б) A (1; 3), B (3; 1); г) A (2; 2), B (4; 1); е) A (2; −2), B (4; 1)?

55 Постройте графики функций в одной системе координат и сделайте вывод об их взаимном расположении:

а) $y = \dfrac{4}{x}$ и $y = -\dfrac{4}{x}$; б) $y = \dfrac{6}{x}$ и $y = -\dfrac{6}{x}$.

56 Не строя графика зависимости $y = \dfrac{k}{x}$, определите, в каких координатных четвертях он расположен, если

а) $k = 2$; б) $k = -5$; в) $k = -0,5$; г) $k = 10$.

57 Функции заданы формулами $y=\frac{k_1}{x}$ и $y=\frac{k_2}{x}$, где k_1 и k_2 – положительные числа, причем $k_1 > k_2$. Какой из графиков расположен ближе к началу координат?

58 С помощью графика функции $y=-\frac{8}{x}$ найдите три значения аргумента, при которых значения функции:

а) больше 2; г) меньше 1;
б) больше 0; д) меньше 0;
в) больше −4; е) меньше −8.

59 Как вы думаете, каковы минимальное и максимальное значение функции $y=\frac{3}{x}$ на отрезке:

а) $[-3; -\frac{1}{3}]$; б) $[3; 9]$?

60 Как вы думаете, каковы минимальное и максимальное значение функции $y=-\frac{3}{x}$ на отрезке:

а) $[-9; -1]$; б) $[0,3; 0,6]$?

61 Исследуйте функцию с заданной областью определения на четность:

а) $y=\frac{2}{x}$ при $x \in (-20; 0) \cup (0; 20)$; в) $y=\frac{10}{x}$ при $x \in [-100; 0,01]$;

б) $y=-\frac{1,5}{x}$ при $x \in (-0,3; 0) \cup (0; 0,3]$; г) $y=-\frac{1,4}{x}$ при $x \in [-7; 0,7]$.

62 Какие из следующих функций являются: а) четными; б) нечетными?

а) $y=-\frac{1}{x}$; б) $y=x+\frac{1}{x}$; в) $y=x^3-\frac{1}{x}$; г) $y=\frac{3}{|x|}$; д) $y=\frac{5}{x^2}$.

Будут ли указанные вами функции четными (нечетными), если ограничить их область определения до множества положительных чисел?

63 Дана функция $f(x) = \frac{0,2}{x}$. Найдите:

а) $f(\frac{1}{5})$; б) $f(2)$; в) $f(-0,04)$; г) $f(-\frac{6}{25})$; д) $10 \cdot f(-0,001)$; е) $f(a)$.

64 Дана функция $f(x) = \frac{2}{x}$. Найдите:

а) $f(-0,5b)$; б) $0,5f(d^2)$; в) $f(m+2)$; г) $\frac{2}{f(t+10)}$.

65 Дана функция $f(x) = \frac{5}{x}$. Докажите, что

а) $\frac{1}{f(x-1)}+\frac{1}{f(x+1)}=\frac{2}{f(x)}$; б) $\frac{1}{f(x-1)}\cdot\frac{1}{f(x+1)}=\frac{1}{5f(x^2-1)}$.

66 Решите графически уравнение:

а) $-\frac{3}{x}=3$; в) $\frac{5}{x}=-2$; д) $-\frac{6}{x}=0$; ж) $-\frac{1}{x}=1,5x+2,5$;

б) $\frac{1}{x}=x$; г) $\frac{5}{x}=5x$; е) $-\frac{7}{x}=3x$; з) $\frac{4}{x}=-x-4$.

67 Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y=\frac{0,5}{x} \\ y=1 \end{cases}$; в) $\begin{cases} y=\frac{6}{x} \\ y=\frac{2}{3}x \end{cases}$; д) $\begin{cases} y=\frac{8}{x} \\ y=-x+6 \end{cases}$; ж) $\begin{cases} y=\frac{1}{x} \\ y=x^4 \end{cases}$; и) $\begin{cases} y=-\frac{4}{x} \\ y=|x| \end{cases}$;

б) $\begin{cases} y=-\dfrac{2,5}{x}; \\ y=-5 \end{cases}$ г) $\begin{cases} y=-\dfrac{6}{x}; \\ y=-2x-4 \end{cases}$ е) $\begin{cases} y=-\dfrac{3}{x}; \\ y=2x+5 \end{cases}$ з) $\begin{cases} y=\dfrac{1}{x}; \\ y=x^5 \end{cases}$ к) $\begin{cases} y=\dfrac{2}{x} \\ y=-|x| \end{cases}$.

68 Определите количество решений системы уравнений:

а) $\begin{cases} y=\dfrac{1,5}{x}; \\ y=x^{10} \end{cases}$ б) $\begin{cases} y=-\dfrac{5}{x}; \\ y=x^{11} \end{cases}$ в) $\begin{cases} y=\dfrac{16}{x} \\ y=x^{9} \end{cases}$.

69 Касательная к гиперболе $y=\dfrac{1}{x}$ определяется как прямая, не параллельная ни оси абсцисс, ни оси ординат, и имеющая с гиперболой ровно одну общую точку. Докажите, что прямая $y = 2 - x$ является касательной к гиперболе $y=\dfrac{1}{x}$ в точке $A\,(1;1)$. Постройте на одном рисунке графики функций $y=\dfrac{1}{x}$ и $y = 2 - x$.

70 Постройте таблицу (для положительных значений x) и графики (для всех значений x из области определения) функций $y=\dfrac{1}{x^2}$ и $y=\dfrac{1}{x^3}$. Докажите, что функция $y=\dfrac{1}{x^2}$ является четной, а функция $y=\dfrac{1}{x^3}$ – нечетной.

71 Закон Ома для участка цепи постоянного тока задается формулой $I=\dfrac{U}{R}$, где I – сила тока в амперах (А), U – напряжение на участке в вольтах (В), R – сопротивление участка (Ом).

а) Докажите, что если напряжение на участке постоянно, то сила тока обратно пропорциональна сопротивлению участка.

б) Постройте таблицу и график для этой зависимости, если $U = 10$ В.

в) Коротким замыканием называется процесс в цепи, когда сопротивление участка внезапно становится очень малым. Что при этом происходит?

72 Площадь прямоугольника $ABCD$ равна 20 см². Докажите, что длины сторон AB и AD связаны обратной пропорциональностью. Может ли длина стороны AB:

а) быть меньше 1 мм?

б) быть меньше 1 нм (1 мм = 1 000 000 нм)?

в) равняться нулю?

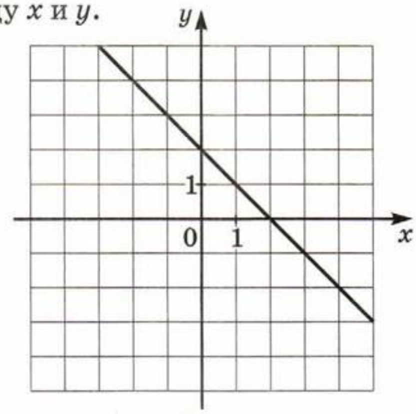
г) равняться 1 км?

73 Два отрезка с длинами a и b являются сторонами прямоугольника, площадь которого равна 1 см². Отрезок b является радиусом круга. Постройте график зависимости площади круга S (см²) от длины отрезка a. Длины отрезков измеряются в см, площадь круга радиуса R равна $S = \pi R^2$, где $\pi \approx 3,14$.

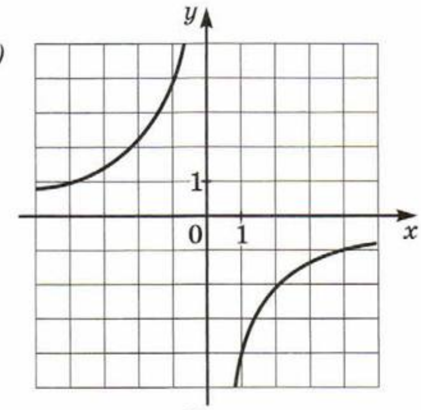
74 Докажите, что площадь прямоугольника, одна из вершин которого лежит на гиперболе $y=\dfrac{k}{x}$, а две стороны, не выходящие из этой вершины, на осях координат, – постоянная величина (не зависит от координатного расположения прямоугольника). Выразите эту величину через коэффициент k.

75 На рисунках а–з приведены графики, изображающие некоторые зависимости между x и y.

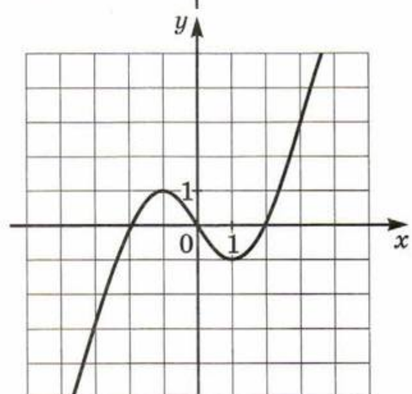
а)



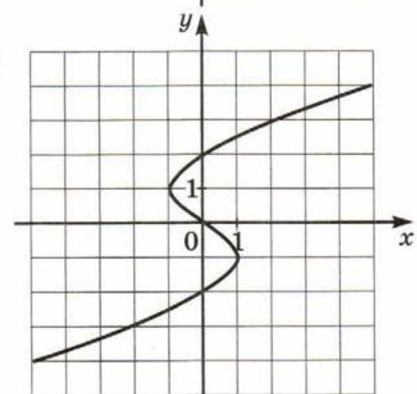
б)



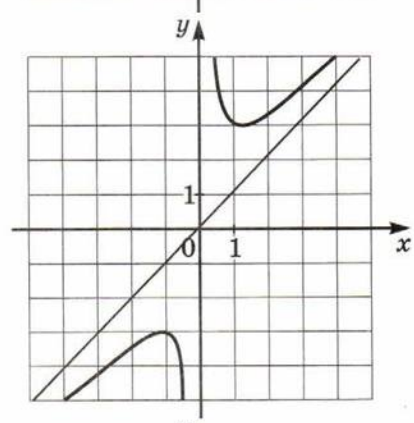
в)



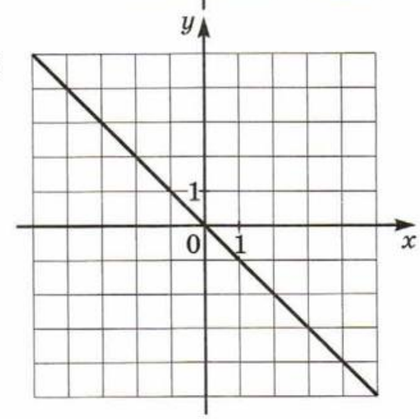
г)



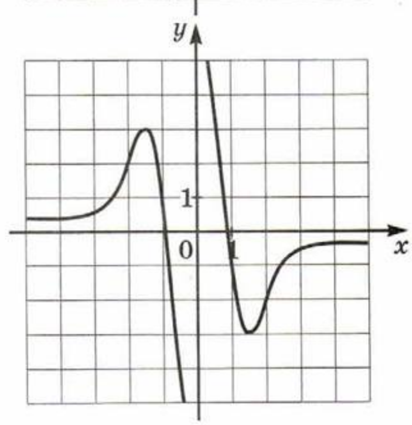
д)



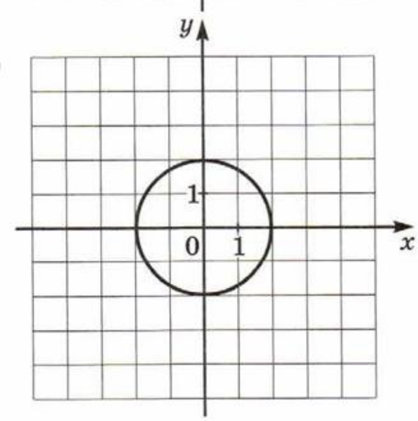
е)



ж)



з)



Для каких из них: 1) зависимость является функцией y от x; 2) зависимость является прямой пропорциональностью; 3) зависимость является обратной пропорциональностью; 4) начало координат является центром симметрии; 5) график является графиком нечетной функции; 6) график симметричен относительно прямой $y = x$?

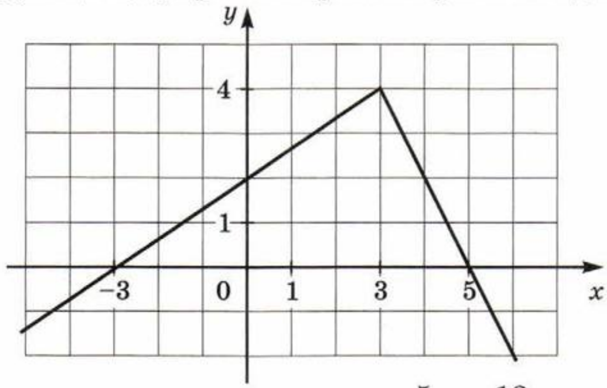
П **76** Определите, при каких значениях переменных имеют смысл выражения:

а) $\dfrac{m}{m(m-3)}$; б) $\dfrac{t+4}{t^2+16}$; в) $\dfrac{5}{(a+12)a^4}$; г) $\dfrac{p}{|p|-5}$; д) $\dfrac{10}{|z|+10}$.

77 Постройте график кусочно-линейной функции:

а) $y=\begin{cases} x-1, \text{ если } x\,l \geqslant 0; \\ -x+1, \text{ если } x<0 \end{cases}$ б) $y=\begin{cases} 4, \text{ если } x \geqslant 2; \\ 2x, \text{ если } x<2 \end{cases}$

78 Задайте формулой функцию, график которой изображен на данном рисунке.



79 Запишите число в виде периодической дроби: а) $\dfrac{5}{9}$; б) $\dfrac{13}{15}$; в) $-5\dfrac{4}{22}$; г) $3\dfrac{17}{34}$.

80 Обратите периодическую дробь в обыкновенную:

а) 0,(61); б) 0,(39); в)0,2(7); г) −0,3(1); д) 5,1(45); е) −4,3(73).

81 Сравните:

а) 0,11(13) и 0,1113; в) $-1\dfrac{2}{3}$ и −1,65; д) $\dfrac{1}{12}$ и 0,0(83);

б) 0,(23) и 0,233; г) $-\dfrac{10}{7}$ и −1,428572; е) $\dfrac{5}{16}$ и 0,312(5).

Д **82** Обратная пропорциональность задана таблицей. Используя таблицу, определите коэффициент обратной пропорциональности k и заполните таблицу:

а)

x	−3		−1	−0,5		2	
y		1,5		−6	6		1

б)

x	2	3	−10			12	
y		−6		−12	3		−3

83 Задайте формулой обратную пропорциональность, если известно, что график проходит через точку:

а) N (0,7; −5); б) F (−1,4; −5); в) $P(2\dfrac{3}{8}; \dfrac{4}{19})$; г) S (−13; 0,4).

84 Можно ли указать обратную пропорциональность, график которой проходит через следующие две точки плоскости:

а) M (0,2; 5), R (−0,5; −2); б) D (4; −1), F (1; −4); в) Q (5; 2,5), K (2; 5).

85 Постройте график функции $y=\frac{k}{x}$ при условии, что он проходит через точку $S(-1{,}6; 5)$.

86 Не строя графика зависимости $y=\frac{k}{x}$, определите, в каких координатных четвертях он расположен, если

а) $k=11$; б) $k=-10$; в) $k=-0{,}3$; г) $k=8$.

87 Определите коэффициент обратной пропорциональности для графика функции $y=\frac{k}{x}$, проходящего через точку A. В каких координатных четвертях этот график расположен?

а) $A(2; 3)$; б) $A(-2; 10)$; в) $A(-3; 21)$; г) $A(20; -1)$.

88 С помощью графика функции $y=\frac{18}{x}$ найдите три значения аргумента, при которых значения функции:

а) больше 9;
б) больше 0, но меньше 2;
в) больше −6;
г) больше −3, но меньше 0.

89 Найдите наименьшее и наибольшее значение функции $y=-\frac{16}{x}$ на отрезке

а) $[-8; -2]$; б) $[-4;-1]$.

90 Исследуйте функцию на четность:

а) $y=\frac{1}{x}$ при $x\in[-100; 0)\cup(0; 100]$; б) $y=\frac{0{,}8}{x}$ при $x\in[0{,}08; 8]$.

91 Дана функция $f(x)=\frac{90}{x}$. Найдите:

а) $f(-5)$; б) $f(0{,}01)$; в) $f(d+12)$; г) $\frac{1}{9}\cdot f(a)$; д) $f(-10q)$.

92 Решите графически уравнение:

а) $\frac{5}{x}=2{,}5$; в) $-\frac{6}{x}=-1$; д) $\frac{5}{x}=0$;

б) $\frac{2}{x}=-x+3$; г) $\frac{-3}{x}=x-4$; е) $-\frac{11}{x}=x$.

93 Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y=\frac{4}{x} \\ y=4 \end{cases}$; в) $\begin{cases} y=\frac{8}{x} \\ y=x^2 \end{cases}$; д) $\begin{cases} y=-\frac{5}{x} \\ y=x+6 \end{cases}$; ж) $\begin{cases} y=\frac{3}{x} \\ y=-\frac{1}{3}x \end{cases}$;

б) $\begin{cases} y=-\frac{8}{x} \\ y=-2x \end{cases}$; г) $\begin{cases} y=\frac{16}{x} \\ y=x^3 \end{cases}$; е) $\begin{cases} y=\frac{2}{x} \\ y=-2x+4 \end{cases}$; з) $\begin{cases} y=-\frac{3}{x} \\ y=3x \end{cases}$.

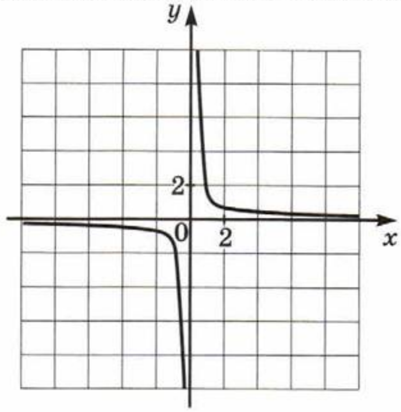
94 Изобразите схематически графики функций $y=\frac{k}{x}$ и $y=bx+m$ так, чтобы они пересекались в одной точке, в двух точках, в трех точках.

95 В цепи постоянного тока силой 5 А рассматриваются различные участки. Какой будет зависимость напряжения на участке цепи от сопротивления этого участка? Постройте таблицу и график для этой зависимости.

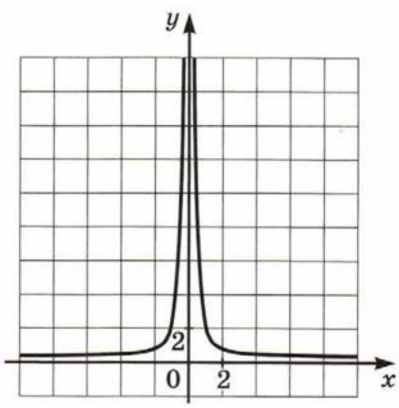
96 Сила взаимодействия между двумя электрическими зарядами в системе СИ вычисляется по формуле $F=k\frac{q_1q_2}{r^2}$, где F измеряется в ньютонах, расстояние r между зарядами – в метрах, величины зарядов q_1 и q_2 – в кулонах (единица заряда в системе СИ), $k = 9 \cdot 10^9$ (в единицах системы СИ). Постройте таблицу и график зависимости силы притяжения между двумя зарядами разного знака в 1 кулон от расстояния между ними, если расстояние меняется от 0,5 м до 1 м с шагом 0,05 м. На оси абсцисс выберите масштаб 0,1 м в 1 см, на оси ординат – 10^{10} ньютонов в 1 см.

97 Даны графики нескольких функций вида $y = \frac{1}{x^k}$, где k – целое ненулевое число. Укажите для каждой из них четность показателя k.

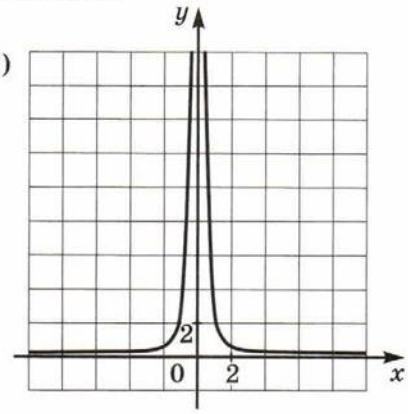
а)



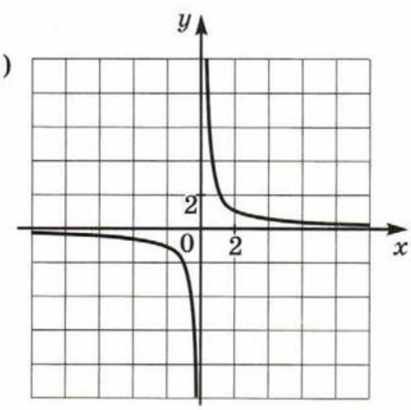
б)



в)



г)



98 Какие из следующих функций являются: а) четными; б) нечетными?

а) $y = \frac{14}{x}$; б) $y = -\frac{7}{x} + 7$ в) $y = \frac{13}{|x|}$; г) $y = \frac{9}{x^2}$; д) $y = -\frac{5}{x^3}$.

99 Постройте график функции: а) $y = \frac{5}{x^2}$; б) $y = -\frac{12}{x^3}$.

100 Постройте график кусочно-линейной функции:

а) $y = \begin{cases} x+1, \text{ если } x \geqslant 1; \\ -2x+1, \text{ если } x < 1 \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} 3x, \text{ если } x \geqslant 3; \\ 3, \text{ если } x < 3. \end{cases}$

101 Определите, при каких значениях переменных имеют смысл выражения:

а) $\frac{n}{n+8}$; б) $\frac{3}{q^8+1}$; в) $\frac{r}{r^2-9}$; г) $\frac{d}{d(d+5)}$; д) $\frac{4h}{|h|-4}$.

102 Сравните:

а) 0,22(15) и 0, 2215; в) $-1\frac{5}{9}$ и $-1{,}55$; д) $\frac{1}{15}$ и 0,(6);

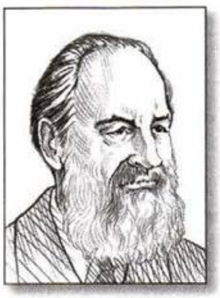
б) 0,1(9) и 0,(2); г) $-\frac{3}{11}$ и $-0{,}271$; е) $\frac{4}{30}$ и 0,1(31).

С **103*** Может ли разность двух чисел вида $n^2 + 4n$ равняться 20 202 (n – натуральное число)?

104* Докажите, что $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{999}{1000!}<1$.

105* На доске написаны четыре числа. Разрешается выбрать любые два из них, прибавить к ним по единице и записать полученные числа вместо выбранных. Можно ли с помощью нескольких таких операций из чисел 1, 3, 5, 10 получить четыре равных числа?

3. Кусочно-заданные функции

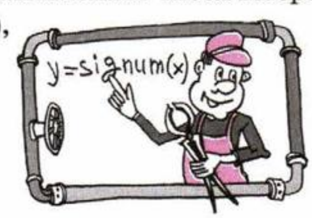


Рано или поздно всякая правильная математическая идея находит применение в том или ином деле.

Алексей Николаевич Крылов (1863–1945),
русский и советский кораблестроитель,
механик, математик

Бывает, что на практике важно отследить не значение некоторой величины, а только ее знак. Так, для работы компаний мобильной связи в некоторых случаях достаточно отслеживать не значение текущей суммы на счете пользователя, а лишь знак его баланса. Весной для спасения саженцев от ночных заморозков садовода часто волнует лишь плюсовая температура. Чтобы автоматизировать процессы предоставления услуг связи, включения отопления и пр., возникает необходимость описать на математическом языке правило, которое каждому числу ставит в соответствие его знак.

Функция, которая удовлетворяет этому требованию, была введена еще в конце XIX века немецким математиком Леопольдом Кронекером. Областью определения этой функции является множество всех чисел, для обозначения положительных чисел выбрано число (+1), для обозначения отрицательных чисел – число (−1), а нулю соответствует 0:



$$y=\begin{cases}1, \text{ если } x>0;\\ 0, \text{ если } x=0;\\ -1, \text{ если } x<0\end{cases}$$

Эту функцию обозначают $y = sign(x)$, читают: «сигнум икс» (от латинского «signum» – «знак»). В наши дни функция сигнум используется в самых разных разделах математики, например, в математической статистике.

Областью определения данной функции является множество $X = (-\infty; +\infty)$, которое разбивается на три попарно непересекающихся подмножества $X_1 = (-\infty; 0)$, $X_2 = \{0\}$ и $X_3 = (0; +\infty)$:

$X_1 \cup X_2 \cup X_3 = X$; $X_1 \cap X_2 = \varnothing$; $X_1 \cap X_3 = \varnothing$; $X_2 \cap X_3 = \varnothing$

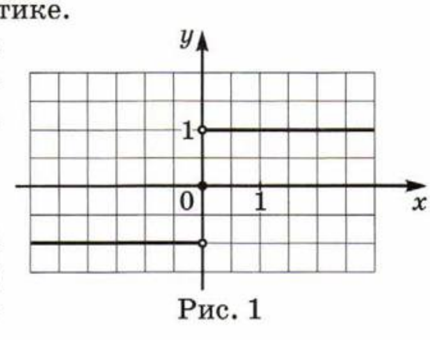


Рис. 1

График функции сигнум состоит из двух лучей $y = 1$ и $y = -1$, а также отдельно расположенной точки (0; 0) (рис. 1). Начало каждого из этих лучей не принадлежит графику, поэтому эти точки изображены «выколотыми» (иногда точки, не принадлежащие графику, обозначают стрелками).

Функция $y = sign(x)$ напоминает изученные нами в 7 классе кусочно-линейные функции. Однако, в отличие от них, у функции сигнум один из числовых промежутков, составляющих область определения, «сжался» в точку. Поэтому нам необходимо обобщить понятие кусочно-линейной функции и дополнить его случаями, когда в некоторых точках функция принимает «отдельные» значения. При таком понимании функция $y = sign(x)$ является кусочно-линейной. Попробуйте сами сформулировать новое, обобщенное определение этого понятия.

Вместе с тем в предыдущих пунктах мы выяснили, что многие реальные процессы могут описываться и нелинейными функциями. Поэтому нам необходимо продолжить обобщение понятия кусочно-линейной функции и ввести новую, так называемую *кусочно-заданную* функцию, где на каждом из промежутков функция может быть задана не только формулой $y = kx + b$, но и другими формулами самых разных видов – например, $y = x^n$, $y = \frac{1}{x}$ и т.д.

Ясно, что кусочно-линейные функции также являются кусочно-заданными (а вот обратное верно не всегда!). Поэтому начнем знакомство с кусочно-заданными функциями с уточнения особенностей более простого их случая кусочно-линейных функций.

Пример 1.

Вспомним одну из простейших кусочно-линейных функций $y = |x|$. Используя определение модуля, ее можно записать в виде:

$$y = \begin{cases} x, \text{ если } x \geqslant 0; \\ -x, \text{ если } x < 0 \end{cases}$$

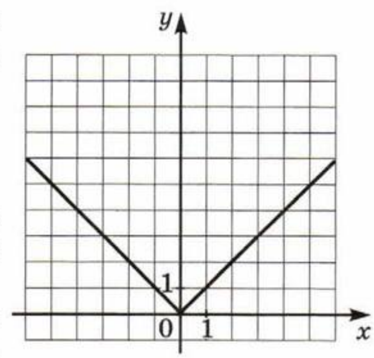


Рис. 2

График этой функции изображен на рис. 2. Ее область определения разбита на два промежутка $X_1 = (-\infty;\ 0)$ и $X_2 = [0;\ +\infty)$, где $X_1 \cup X_2 = (-\infty;\ +\infty)$, $X_1 \cap X_2 = \varnothing$.

Оба промежутка X_1 и X_2 имеют «общий конец» – точку 0, который принадлежит правому промежутку, но не принадлежит левому. При этом в точке 0 происходит «стыковка» значений функций, ведь по какой бы из формул мы бы ни вычисляли значение функции, для нее оно будет одним и тем же.

Однако подобная «стыковка» значений функций, заданных на разных промежутках, происходит далеко не всегда.

Пример 2.

Рассмотрим функцию $y = \begin{cases} x+1, \text{ если } x \geqslant 0; \\ -x, \text{ если } x < 0 \end{cases}$

Область определения этой функции $X = (-\infty;\ +\infty)$ разбита на промежутки $X_1 = (-\infty;\ 0)$ и $X_2 = [0;\ +\infty)$. Правый конец X_1 совпадает с левым концом X_2 (точка 0), но значения функций на обоих промежутках в точке 0 не совпадают: при $x = 0$ значение $x + 1 = 0 + 1 = 1$, а значение $-x = -0 = 0$ $(1 \neq 0)$.

График данной функции приведен на рис. 3. На левом участке графика точка 0 изображена «выколотой», так как концевая точка этому участку графика не принадлежит. Из-за отсутствия «стыковки» график *не соединяется в единую ломаную*.

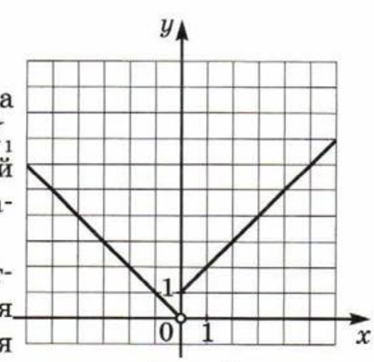


Рис. 3

Если определить функцию немного иначе:

$$y=\begin{cases} x+1, \text{ если } x>0; \\ -x, \text{ если } x\leqslant 0 \end{cases},$$

то «выколотой» точкой будет отмечен уже не левый, а правый участок графика (рис. 4).

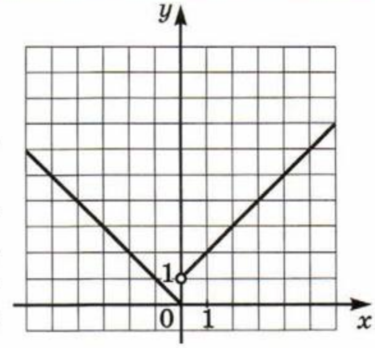


Рис. 4

Во всех рассмотренных нами примерах область определения функции совпадала с числовой прямой $X=(-\infty;+\infty)$. Однако кусочно-заданные функции (и, в том числе, кусочно-линейные) могут быть заданы на любом объединении числовых промежутков.

Пример 3.

Рассмотрим функцию $y=\begin{cases} x+1, \text{ если } x\leqslant -1; \\ x-1, \text{ если } x\geqslant 1 \end{cases}$

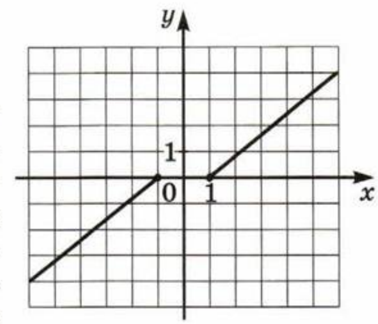


Рис. 5

Эта функция также является не только кусочно-заданной, но и кусочно-линейной. Ее график изображен на рис. 5.

Область определения данной функции является объединением двух лучей: $X=X_1\cup X_2$, где $X_1=(-\infty;-1]$, $X_2\in[1;+\infty)$. При этом правый конец X_1 (точка -1) не совпадает с левым концом X_2 (точка 1), поэтому область определения этой функции не является числовым промежутком. Во всех точках интервала $(-1;1)$ функция не определена.

Рассмотрим теперь кусочно-заданные функции более сложного вида.

Пример 4.

Построить график функции: $y=\begin{cases} 5, \text{ если } x>1; \\ x, \text{ если } -1<x\leqslant 1; \\ 2, \text{ если } x=-1; \\ \dfrac{1}{x}, \text{ если } x<-1 \end{cases}$

Решение:

Для построения графика кусочно-заданной функции воспользуемся алгоритмом построения кусочно-линейной функции с той лишь разницей, что на каждом из промежутков может быть получена часть не прямой, а кривой линии.

Область определения функции $X=(-\infty;+\infty)$ разбита на четыре непересекающихся части. Пронумеруем их по мере движения по числовой прямой слева направо: $X_1=(-\infty;-1)$; $X_2=\{-1\}$; $X_3=(-1;1]$; $X_4=(1;+\infty)$.

На каждом из выделенных промежутков и в точке $x=-1$ построим график, который задан соответствующей формулой.

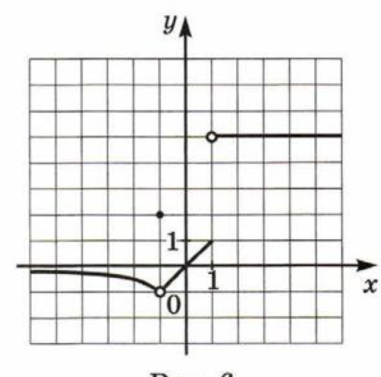


Рис. 6

Полученный график изображен на рис. 6. Он состоит из куска ветви гиперболы $y=\dfrac{1}{x}$, при $x<-1$; точки $(-1;2)$; прямолинейного отрезка $y=x$, при $-1<x\leqslant 1$; горизонтального луча $y=5$, при $x>1$. Концевые точки частей графика, не принадлежащие им, отмечены «выколотыми» точками.

* * *

Приведем примеры реальных ситуаций, которые описываются кусочно-заданными функциями.

Мы привыкли решать задачи на движение, упрощая реальный процесс. Для простоты мы обычно считаем, что объект сразу движется с постоянной скоростью, указанной в задаче. Однако в жизни это происходит иначе: сначала объект должен «набрать» эту заданную скорость. Попробуем описать прямолинейное движение объекта без подобных «математических» упрощений, используя законы, известные из курса физики.

Задача.

Автомобиль движется из состояния покоя (в момент $t = 0$) с ускорением $a = 0{,}1\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Через 3 минуты движения он достигает некоторой скорости v_0, после чего продолжает равномерно двигаться с этой скоростью. Какой путь проедет автомобиль из начальной точки через 1 минуту после начала движения? Через 2 минуты, 3 минуты, 5 минут, 10 минут? Постройте график зависимости $s\,(t)$, где время t от начала движения измеряется в минутах, s – в километрах.

Решение:

Если при прямолинейном движении скорость объекта прямо пропорционально зависит от времени ($v = at$, где коэффициент пропорциональности a называется *ускорением*), то путь, пройденный из точки начала движения ($t = 0$, $v = 0$), вычисляется по формуле $s = \frac{at^2}{2}$.

1. Выразим ускорение в требуемых единицах измерения:

$$a = 0{,}1\frac{\text{м}}{\text{с}^2} = 0{,}1\frac{\text{км}/1000}{(\text{мин}/60)^2} = 0{,}1\cdot\frac{3600}{1000}\frac{\text{км}}{\text{мин}^2} = 0{,}36\frac{\text{км}}{\text{мин}^2}.$$

2. Промежуток времени, за которое автомобиль наберет скорость v_0, обозначим t_0, а путь, который автомобиль пройдет за это время, – s_0. По условию $t_0 = 3$ мин. Выясним, до какой скорости разгонится автомобиль за эти 3 минуты.

$$v_0 = a\cdot t_0 = 0{,}36\,\frac{\text{км}}{\text{мин}^2}\cdot 3\text{ мин} = 1{,}08\,\frac{\text{км}}{\text{мин}}$$

3. Найдем зависимость $s\,(t)$, где t – время от начала движения, s – путь, пройденный с момента начала движения.

3.1. Если $t \leqslant 3$, то пройденный путь вычисляется по формуле $s = \frac{at^2}{2}$. Подставим в нее соответствующее значение a:

$$s\,(t) = \frac{at^2}{2} = \frac{1}{2}\cdot 0{,}36\cdot t^2 = 0{,}18t^2$$

Таким образом, при $t \leqslant 3$ функция $s\,(t)$ является нелинейной функцией от t, графиком ее будет часть параболы.

3.2. При $t > 3$, пройдя путь s_0, автомобиль далее двигался равномерно со скоростью $v_0 = 1{,}08\,\frac{\text{км}}{\text{мин}}$ в течение времени $(t - 3)$ мин. Значит, зависимость $s\,(t)$ на этом участке задается формулой:

$$s\,(t) = s_0 + v_0\,(t - 3) = 0{,}18\cdot 3^2 + 1{,}08\cdot(t - 3) = 1{,}62 + 1{,}08t - 3{,}24 = 1{,}08t - 1{,}62$$

Таким образом, при $t > 3$ пройденный с начала движения путь является линейной функцией от t, графиком этой функции будет открытый луч.

4. Итак,

$$s(t) = \begin{cases} 0{,}18t^2, \text{ если } t \leqslant 3; \\ 1{,}08t - 1{,}62, \text{ если } t > 3 \end{cases}$$

Пройденный путь $s(t)$ – кусочно-заданная функция с областью определения $X = [0; +\infty)$. Эта область определения разбивается на два непересекающихся промежутка $X_1 = [0; 3]$ и $X_2 = (3; +\infty)$.

5. Пользуясь полученной формулой, вычислим, какой путь проедет автомобиль из начальной точки через 1 мин, 2 мин, 3 мин, 5 мин, 10 мин после начала движения.

Если $t = 1$ мин, $s = 0{,}18 \cdot 1^2 = 0{,}18$ км;

если $t = 2$ мин, $s = 0{,}18 \cdot 2^2 = 0{,}72$ км;

если $t = 3$ мин, $s = 0{,}18 \cdot 3^2 = 1{,}62$ км.

Здесь же проверим, состыкуются ли концевые точки частей графика, вычислив $s(3)$ по другой формуле:

$s(3) = 1{,}08t - 1{,}62 = 1{,}08 \cdot 3 - 1{,}62 = 1{,}62$.

Значения одинаковые, значит, части графика состыкуются.

Если $t = 5$ мин, $s = 1{,}08 \cdot 5 - 1{,}62 = 3{,}78$ км;

если $t = 10$ мин, $s = 1{,}08 \cdot 10 - 1{,}62 = 9{,}18$ км.

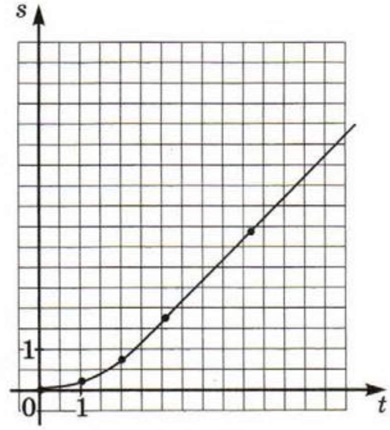


Рис. 7

Построим теперь график функции $s(t)$, используя полученные координаты точек $(t; s)$ и учитывая, что $s(0) = 0$.

График изображен на рис. 7. Первый участок графика – часть параболы, отличающейся от параболы $s = t^2$ лишь постоянным коэффициентом 0,18. Вторая часть графика – участок прямой, для построения которой достаточно значений функции в двух точках (например, $t = 3$ и $t = 5$).

К **106** Турист в течение первых 3 часов шел со скоростью 4 км/ч. После этого он отдыхал в течение получаса. Следующие 2 часа он шел со скоростью 3 км/ч. Запишите формулу зависимости пути s от времени движения t в часах.

Как называется полученная функция? Постройте ее график на координатной плоскости Ost.

107 1) Постройте графики кусочно-линейных функций:

а) $y = \begin{cases} x-2, \text{ если } x \geqslant 2; \\ -x+2, \text{ если } x < 2 \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} x-2, \text{ если } x \geqslant 0; \\ -x+2, \text{ если } x < 0 \end{cases}$

Чем отличаются эти функции? Какой из построенных графиков не является ломаной? На последнем графике найдите луч, начало которого не принадлежит графику функции.

2) Постройте график функции $y = \begin{cases} x-2, \text{ если } x > 0; \\ 1, \text{ если } x = 0; \\ -x+2, \text{ если } x < 0 \end{cases}$

Чем отличается эта функция от предыдущей? Найдите на графике этой функции лучи, начало которых не принадлежит графику.

3) Предложите, каким способом можно показать, что начало луча не принадлежит графику. Сравните свой способ с общепринятым способом, познакомившись с еще одним примером кусочно-линейной функции на стр. 28 учебника.

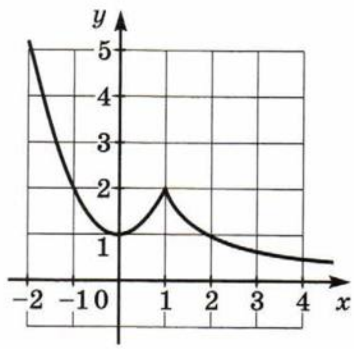
4) Перечислите новые особенности кусочно-линейных функций, которые вы выявили с помощью этого задания.

108 1) Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \geqslant 1; \\ x, \text{ если } x < 1 \end{cases}$. Является ли эта функция кусочно-линейной?

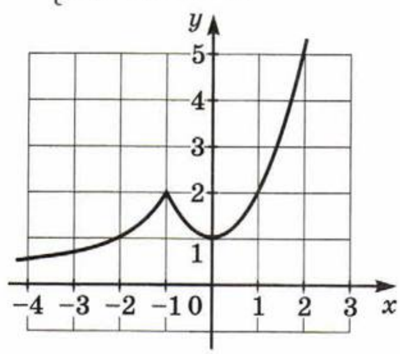
2) Предложите название для этой функции. Сравните его с общепринятым названием, указанным на стр. 29 учебника. Приведите пример величин, связанных аналогичной зависимостью.

109 Укажите, какой из графиков задается функцией $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, \text{ если } x \geqslant 1;\\ x^2, \text{ если } x<1\end{cases}$

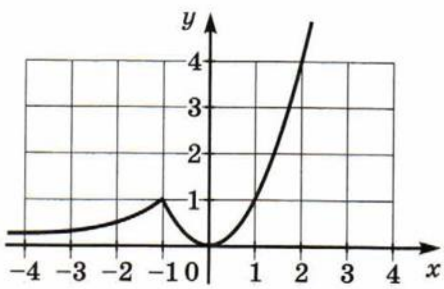
1)



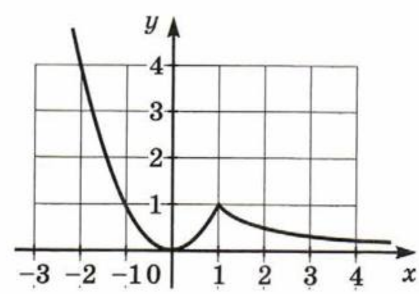
3)



2)



4)



110 Постройте графики кусочно-линейных функций:

а) $y=\begin{cases}2x-3, \text{ если } x>4;\\ -x+9, \text{ если } x\leqslant 4\end{cases}$ б) $y=\begin{cases}2x-3, \text{ если } x>-1;\\ -x+9, \text{ если } x\leqslant -1\end{cases}$

111 Постройте графики кусочно-линейных функций:

а) $y=\begin{cases}2x-3, \text{ если } x>1;\\ 1, \text{ если } x=1;\\ -2x+1, \text{ если } x<1\end{cases}$ б) $y=\begin{cases}3x-2, \text{ если } x>0;\\ 1, \text{ если } x=0;\\ x+2, \text{ если } x<0\end{cases}$

112 Постройте графики кусочно-линейных функций:

а) $y=\begin{cases}2x-1, \text{ если } x>1;\\ 1, \text{ если } -1\leqslant x\leqslant 1;\\ -2x-1, \text{ если } x<-1\end{cases}$ б) $y=\begin{cases}3x+1, \text{ если } x>2;\\ 1, \text{ если } 0\leqslant x\leqslant 2;\\ -x+1, \text{ если } x<0\end{cases}$

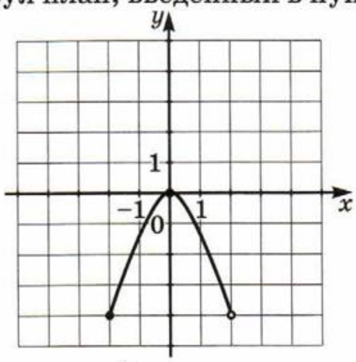
113 Постройте графики функций:

а) $y=\begin{cases}3x-4, \text{ если } x>2;\\ x, \text{ если } -1\leqslant x\leqslant 2;\\ \dfrac{1}{x}, \text{ если } x<-1\end{cases}$ б) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, \text{ если } x\geqslant 1;\\ 2x, \text{ если } 0\leqslant x<1;\\ -x+3, \text{ если } x<0\end{cases}$

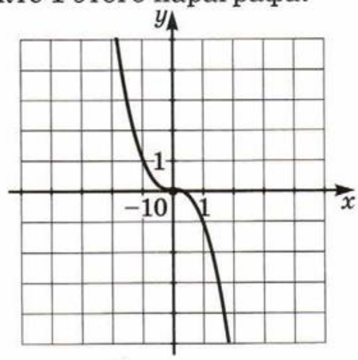
114 Постройте график функции:

а) $y=\dfrac{24}{|x|}$; б) $y=-\dfrac{8}{|x|}$.

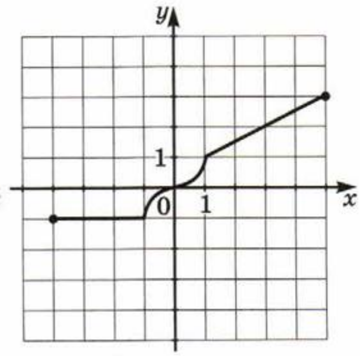
115 На рисунках изображены графики функций. Прочитайте каждый график, используя план, введенный в пункте 1 этого параграфа:



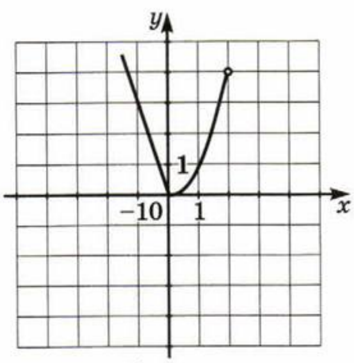
а)



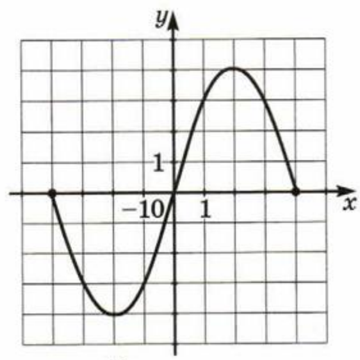
б)



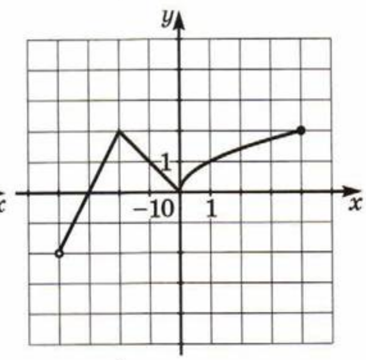
в)



г)



д)



е)

116 Постройте график функции с заданной областью определения и «прочитайте» его:

а) $y=\begin{cases} x^2, \text{ если } 0 \leqslant x < 3; \\ -x^2, \text{ если } -3 < x < 0 \end{cases}$ б) $y=\begin{cases} x, \text{ если } 1 \leqslant x \leqslant 5; \\ x^6, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$

117 Дана функция $y=\begin{cases} x, \text{ если } x \geqslant -2; \\ \dfrac{2}{x}, \text{ если } x < -2 \end{cases}$

Найдите $y\ (-8)$, $y\ (-4)$, $y\ (-1)$, $y\ (-\frac{1}{2})$, $y\ (0)$, $y\ (24)$. Постройте график функции и «прочитайте» его.

118 Дана функция $y=\begin{cases} -2x+2, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 2; \\ -\dfrac{12}{x}, \text{ если } -6 \leqslant x < -2 \end{cases}$

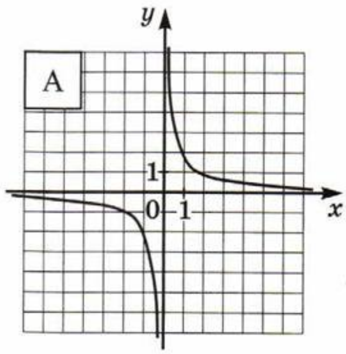
Найдите $y\ (-12)$, $y\ (-3)$, $y\ (-2)$, $y\ (-0{,}6)$, $y\ (0)$, $y\ (4)$.
Постройте график функции $y\ (x)$ и «прочитайте» его.

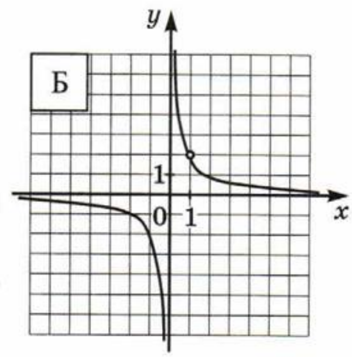
119 Постройте графики кусочно-заданных функций:

а) $y=\begin{cases} -x+4, \text{ если } x \geqslant 2; \\ \dfrac{4}{x}, \text{ если } \dfrac{1}{2} \leqslant x < 2; \\ 8, \text{ если } x < \dfrac{1}{2} \end{cases}$ б) $y=\begin{cases} 5, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 5; \\ -\dfrac{5}{x}, \text{ если } -5 \leqslant x < -1; \\ -x-4, \text{ если } -6 < x < -5 \end{cases}$

120 Постройте график функции и исследуйте ее на четность:
$f(x)=\begin{cases}1+x, \text{ если } x \geqslant 0;\\ -x+1, \text{ если } x<0\end{cases}$

121 На рисунке А изображен график функции $y=\dfrac{2}{x}$. Чем отличается от него график, изображенный на рисунке Б?
Укажите область определения для каждой из функций.
Какой из этих графиков совпадет с графиком функции $y=\dfrac{2(x-1)}{x(x-1)}$?





Объясните, как построить график функции $y=\dfrac{2x-2}{x^2-x}$.

122 Постройте график функции $y=\dfrac{2x^2-2}{x+1}$.

П **123** Представьте каждое из чисел в виде отношения целого числа к натуральному:
$2\dfrac{3}{5}$; -6; $0{,}37$; 0; $-\dfrac{4}{7}$; $0{,}06$; $-15\dfrac{1}{6}$

124 Представьте в виде бесконечной десятичной периодической дроби числа:
а) $\dfrac{3}{9}$; б) $\dfrac{8}{37}$; в) $\dfrac{7}{15}$; г) 3; д) $-15{,}15$; е) $\dfrac{22}{9}$; ж) $-6\dfrac{5}{12}$; з) $\dfrac{89}{11}$.

125 Представьте в виде обыкновенной дроби:
а) $12,(3)$; б) $1,(23)$; в) $15{,}3(1)$; г) $-14{,}0(14)$; д) $8{,}14(8)$.

126 Назовите три числа, заключенных между числами:
а) $2{,}002$ и $2{,}011$; б) $-3{,}009$ и $-3{,}09$; в) $-1\dfrac{3}{4}$ и $-1{,}7(5)$; г) $\dfrac{1}{9}$ и $0,(2)$.

127 Решите неравенство $2|x-3|+x \geqslant 3$.

128 Решите систему неравенств: $\begin{cases}2x+5 \geqslant 0\\ 7-5x \leqslant 0\\ 2x-3<0\end{cases}$.

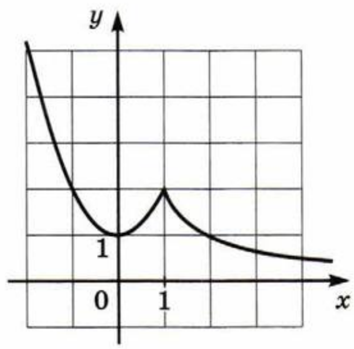
Д **129** Как называются данные функции? Постройте их графики.
а) $y=\begin{cases}0{,}5x+0{,}5, \text{ если } x \geqslant 1;\\ x^8, \text{ если } -1 \leqslant x<1;\\ -0{,}5x+0{,}5, \text{ если } x<-1\end{cases}$ б) $y=\begin{cases}x, \text{ если } x \geqslant 1;\\ x^5, \text{ если } -1 \leqslant x<1;\\ -x-2, \text{ если } x<-1\end{cases}$

130 Дана функция $y=\begin{cases}\dfrac{3}{x}, \text{ если } x>0;\\ \dfrac{-3}{x}, \text{ если } x<0\end{cases}$

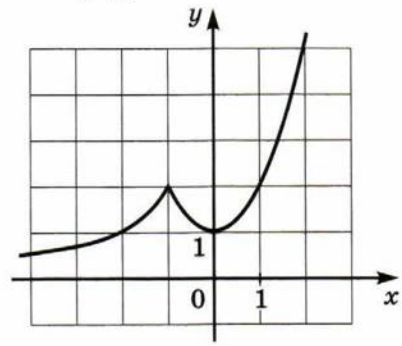
Найдите $y(-9)$, $y(-6)$, $y(-1)$, $y(-\dfrac{3}{5})$, $y(0)$, $y(15)$, $y(30)$. Постройте график функции $y(x)$ и «прочитайте» его.

131 Укажите, какой из графиков задается функцией $y=\begin{cases} x^2, \text{ если } x \geqslant -1; \\ -\dfrac{1}{x}, \text{ если } x < -1. \end{cases}$

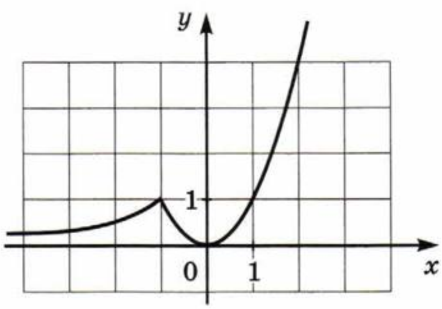
1)



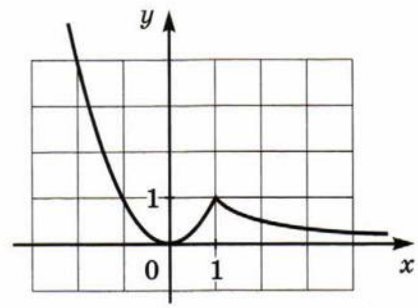
3)



2)



4)



132 Дана функция $y=\begin{cases} -9x, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 1; \\ \dfrac{-9}{x}, \text{ если } x < -1 \end{cases}$

Найдите $y\,(-9)$, $y\,(-4{,}5)$, $y\,(-1)$, $y\,(0)$, $y\,(0{,}5)$, $y\,(3)$. Постройте график функции $y\,(x)$ и «прочитайте» его.

133 Постройте график функции $y=\dfrac{x+1}{x^2+x}$.

134 Назовите пять целых чисел из интервала $(-1{,}6;\ 3{,}2)$.

135 Представьте в виде бесконечной десятичной периодической дроби числа:

а) $\dfrac{1}{4}$; б) $\dfrac{2}{9}$; в) $\dfrac{22}{6}$; г) $8{,}09$; д) $-\dfrac{5}{3}$; е) $-8\dfrac{7}{11}$.

136 Представьте в виде обыкновенной дроби:

а) $1,(1)$; б) $2{,}0(9)$; в) $-6,(12)$; г) $9{,}8(76)$; д) $-0{,}13(52)$.

137 Решите неравенство $|5-x|+x \leqslant 5$.

138 Решите систему неравенств: $\begin{cases} 7-48x \leqslant -5 \\ 15x-1 \geqslant 2 \\ 3x<1 \end{cases}$.

C **139*** Произведение трех натуральных чисел оканчивается на 2002. Может ли их сумма равняться 9999?

140* В компании 100 акционеров, и любые 66 из них владеют не менее чем 50% акций компании. Каким наибольшим процентом всех акций может владеть один акционер?

§ 2. Квадратный корень

1. Арифметический квадратный корень и его свойства

Математика должна помогать... углубляться в понятие числа, пространства и времени. Люди, посвященные в ее тайны, вкушают наслаждения, подобные тем, которые дает нам живопись и музыка.

Жюль Анри Пуанкаре (1854–1912),
французский математик, физик, философ

«Открыть» – «закрыть», «взять» – «положить на место»... Мы записали пары, состоящие из обратных операций, последовательное выполнение которых возвращает ее объект к исходному состоянию. Таким же образом мы можем указать и пары математических операций: «сложить» – «вычесть», «умножить» – «разделить».

Вспомним еще одну известную нам операцию – возведение во вторую степень. А какая операция будет обратной для нее? В данном пункте мы будем искать ответ на этот вопрос, чтобы расширить свои возможности в решении практических задач.

Возведение в квадрат мы встречаем, например, при нахождении площади квадрата x по длине его стороны a (рис. 1). Для решения этой задачи нужно длину стороны a умножить саму на себя, то есть возвести в квадрат: $x = a^2$.

Поставим и решим обратную задачу (рис. 2).

Рис. 1

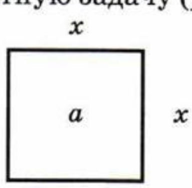


Рис. 2

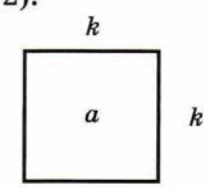
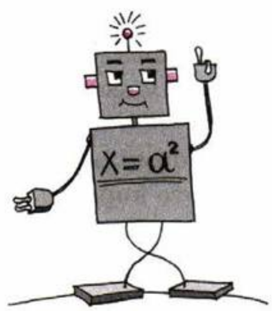


Рис. 3



Задача.

Площадь квадрата a см^2. Найти длину его стороны (в сантиметрах).

Для решения этой задачи нужно решить уравнение $x^2 = a$, где a – некоторое заданное неотрицательное число ($a \geqslant 0$). Требование $a > 0$ следует как из геометрических соображений, так и из свойства степени с четным показателем. Если же $a = 0$, то единственным корнем уравнения является число 0. Но геометрического смысла такое решение не имеет, так как при $a = 0$ квадрат вырождается в точку.

Итак, будем искать решение уравнения $x^2 = a$ при $a > 0$. Ясно, что если число a является квадратом некоторого рационального числа k ($a = k^2$, где $k \in Q$), то уравнение $x^2 = a$ имеет ровно два корня: $x = k$ и $x = -k$ (рис. 3). Из этих корней только положительный станет решением задачи. Например, корнями уравнения $x^2 = 9$ являются числа $x = 3$ и $x = -3$, но геометрический смысл имеет только решение $x = 3$.

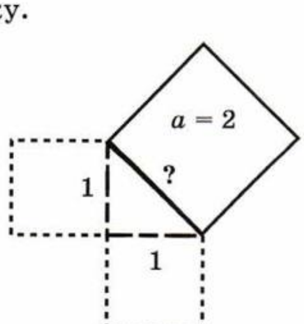


Рис. 4

А как найти решение, если число a не является точным квадратом? С такими примерами мы также уже встречались в 6 классе. Исследуя с помощью теоремы Пифагора длину диагонали квадрата со стороной 1 см, мы получили, что она равна длине стороны квадрата, площадь которого равна 2 см^2 (рис. 4).

Мы доказали также, что искомое число (то есть положительное число, квадрат которого равен 2) не является рациональным, так как не может быть записано конечной либо бесконечной периодической десятичной дробью. Оно представляет собой *иррациональное* число, которое записывается бесконечной непериодической дробью 1,414213561...

Можно доказать, что такое число существует не только для числа 2, но и для любого неотрицательного числа a. Возникает вопрос, как назвать и как записать это число? Неужели так длинно: *«неотрицательное число, квадрат которого равен a»*?

Естественно, что математики придумали таким числам свое название и обозначили специальным символом.

Определение. Пусть a – неотрицательное число. Тогда **арифметическим квадратным корнем** из числа a называется такое неотрицательное число x, что $x^2 = a$.

Арифметический квадратный корень из числа a обозначают $\sqrt{a}$.

Иными словами, $\sqrt{a}$ – это неотрицательное решение уравнения $x^2 = a$. Тогда ответ к задаче будет иметь вид: $\sqrt{a}$ см. Так, например, при $a = 16$ в ответе мы получим рациональное число $\sqrt{16} = 4$ см, а при $a = 6$, мы получим иррациональное число $\sqrt{6}$ см.

Замечание. В ходе решения задачи мы еще раз убедились в том, что помимо известных нам рациональных чисел существуют и иррациональные числа. Все рациональные и иррациональные числа мы будем называть *действительными числами*. Множество действительных чисел обозначается $\boldsymbol{R}$. Действительные числа представляются десятичными дробями – конечными или бесконечными (периодическими или непериодическими).

Сформулируем теоремы о существовании и единственности арифметического квадратного корня на множестве новых для нас действительных чисел.

Теорема 1. Арифметический квадратный корень из любого неотрицательного действительного числа существует и является действительным числом (то есть для $\forall\ a \geqslant 0$, $\exists\ x \geqslant 0$: $\sqrt{a} = x$, где $a,\ x \in \boldsymbol{R}$).

Доказательство теоремы о существовании корня мы не приводим в данном курсе, а вот его единственность нам уже под силу доказать.

Теорема 2. Арифметический корень из неотрицательного действительного числа имеет единственное значение.

Доказательство (метод от противного):

1. Пусть $a \geqslant 0$. Предположим, что существует два различных арифметических корня из числа a – неотрицательные действительные числа x и y, для которых, по определению корня, верно $x^2 = a$ и $y^2 = a$.

2. Так как $x^2 = y^2$, то $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = 0$.

По предположению, $x \neq y$, значит, и $x - y \neq 0$. Поэтому произведение $(x + y)(x - y)$ может равняться нулю только при $x + y = 0$, то есть при $x = -y$. Но в то же время, по условию, эти числа неотрицательны. Следовательно, $x = y = 0$.

3. Предположив, что $x \neq y$ мы получили, что $x = y = 0$. Полученное противоречие означает, что предположение неверно. Значит, $x = y$. Равенство любых двух значений $\sqrt{a}$ означает единственность значения $\sqrt{a}$, что и требовалось доказать.

Итак, мы познакомились с операцией нахождения арифметического квадратного корня из некоторого числа. Ее называют *извлечением квадратного корня.*

Из определения арифметического квадратного корня следует, что $(\sqrt{a})^2 = a$, где $a \geqslant 0$. Это означает, что если из неотрицательного числа a извлечь квадратный корень, а затем результат возвести в квадрат, то получим исходное число a. Значит, операции извлечения квадратного корня и возведения в квадрат являются взаимно обратными на множестве неотрицательных чисел.

Систематизируем установленные нами в ходе рассуждений и выведем некоторые новые свойства арифметического квадратного корня.

***Свойство* 1.** $(\sqrt{a})^2 = a$, где $a \geqslant 0$

Это свойство непосредственно следует из определения квадратного корня и используется для доказательства ряда других его свойств. Поэтому его считают **основным тождеством.**

***Свойство* 2.** $\sqrt{a^2} = |a|$, где $a \in \boldsymbol{R}$

Доказательство:

Пусть $x = |a|$, тогда x – неотрицательное число и $x^2 = (|a|)^2 = a^2$. Следовательно, число x удовлетворяет определению арифметического квадратного корня из a^2, и, в силу единственности корня, $\sqrt{a^2} = |a|$, что и требовалось доказать.

Данное равенство называют **основным свойством корня.**

***Свойство* 3.** $(\sqrt{a})^{2n} = a^n$, где $a \geqslant 0$, $n \in \boldsymbol{N}$

Доказательство:

Применяя свойство возведения степени в степень и основное тождество, имеем: $\left(\sqrt{a}\right)^{2n} = \left(\left(\sqrt{a}\right)^2\right)^n = a^n$, что и требовалось доказать.

***Свойство* 4.** $\sqrt{a^{2n}} = |a^n|$, где $a \in \boldsymbol{R}$, $n \in \boldsymbol{N}$

Доказательство:

Применяя свойство возведения степени в степень и основное свойство корня, имеем: $\sqrt{a^{2n}} = \sqrt{(a^n)^2} = |a^n|$, что и требовалось доказать.

***Свойство* 5.** $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, где $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$

Доказательство:

Пусть $x = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$. Тогда $x^2 = (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab$. Неотрицательное число x удовлетворяет определению арифметического квадратного корня из числа ab, и, в силу единственности корня, $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, что и требовалось доказать.

***Свойство* 6.** $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, где $a \geqslant 0$ и $b > 0$

Доказательство:

Пусть $x = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. Тогда $x^2 = \left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \dfrac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \dfrac{a}{b}$.

Поэтому неотрицательное число x удовлетворяет определению арифметического корня из числа $\dfrac{a}{b}$, и, в силу единственности корня $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, что и требовалось доказать.

Свойство 7. Если $a > b$, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, где $a > 0$ и $b \geqslant 0$[1]
Если $a < b$, то $\sqrt{a} < \sqrt{b}$, где $a \geqslant 0$ и $b > 0$

Доказательство:

Пусть $a > b$. Так как $a = (\sqrt{a})^2$, $b = (\sqrt{b})^2$, то разность $a - b$ можно разложить по формуле разности квадратов:

$$a - b = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \qquad (1)$$

В полученном произведении второй множитель $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geqslant 0$, так как $\sqrt{a} \geqslant 0$ и $\sqrt{b} \geqslant 0$. Вместе с тем, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ не может равняться нулю, так как это означало бы, что $\sqrt{a} = \sqrt{b} = 0$, но тогда и $a = b = 0$, что противоречит условию $a > b$. Следовательно, $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$.

Так как $a > b$ и $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$, то из (1) следует, что $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} > 0$. Значит, $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается, что если $a < b$, то $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Данное свойство верно и для нестрогих неравенств, так как при $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ равенства $a = b$ и $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ равносильны. Таким образом, мы можем записать:

Если $a \geqslant b$, то $\sqrt{a} \geqslant \sqrt{b}$, где $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$
Если $a \leqslant b$, то $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$, где $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$

Свойства арифметического квадратного корня позволяют производить преобразования выражений, содержащих корни.

Пример 1.
Упростить: а) $\sqrt{36 \cdot 64}$; б) $\sqrt{11\frac{1}{9}}$; в) $\sqrt{2^8}$; г) $\sqrt{2^7}$; д) $\sqrt{\frac{1}{2^9}}$.

Решение:

Воспользуемся свойствами корня из произведения и корня из частного:

а) $\sqrt{36 \cdot 64} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{64} = 6 \cdot 8 = 48.$ б) $\sqrt{11\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{100}{9}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{9}} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}.$

в) Из свойства 4 квадратного корня следует, что $\sqrt{2^8} = \sqrt{2^{2 \cdot 4}} = |2^4| = 2^4 = 16$.

г) Воспользуемся 4 и 5 свойствами корней:

$\sqrt{2^7} = \sqrt{2^6 \cdot 2} = \sqrt{2^6} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2^{2 \cdot 3}} \cdot \sqrt{2} = |2^3| \cdot \sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.

д) Воспользуемся 4, 5 и 6 свойствами корней:

$$\sqrt{\frac{1}{2^9}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^9} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^8} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2 \cdot 4}} \cdot \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^4\right| \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{16\sqrt{2}}.$$

Пример 2.
Упростить выражения: а) $\sqrt{3+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3-\sqrt{2}}$; б) $3\sqrt{2}(5+\sqrt{6})$.

а) $\sqrt{3+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3-\sqrt{2}} = \sqrt{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{9-2} = \sqrt{7}$.

В этом примере, помимо 5 свойства корней, мы использовали формулу сокращенного умножения и основное тождество $(\sqrt{a})^2 = a$.

б) $3\sqrt{2}(5+\sqrt{6}) = 15\sqrt{2} + 3\sqrt{12} = 15\sqrt{2} + 3 \cdot 2\sqrt{3} = 15\sqrt{2} + 6\sqrt{3}.$

Замечание. В этом примере при преобразовании $\sqrt{12}$ мы применили прием, называемый *вынесением множителя из-под знака корня*. Этот прием основан на тождественном равенстве: $\sqrt{a^2 b} = |a| \cdot \sqrt{b}$, где $b \geqslant 0$.

[1] Условие $a > b$, $a > 0$, $b \geqslant 0$ часто записывают кратко $a > b \geqslant 0$.

Равенство $\sqrt{a^2b}=|a|\cdot\sqrt{b}$ следует из 2 и 5 свойств арифметического корня. В самом деле, так как $\sqrt{a^2b}$ определен, то $a^2b \geqslant 0$. Так как $a^2 \geqslant 0$ и по условию $b \geqslant 0$, то $\sqrt{a^2b}=\sqrt{a^2}\sqrt{b}=|a|\cdot\sqrt{b}$. Если еще и $a \geqslant 0$, то наше равенство приобретет вид

$\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$, где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$.

Поэтому $\sqrt{12}=\sqrt{4\cdot 3}=\sqrt{2^2\cdot 3}=|2|\sqrt{3}=2\sqrt{3}.$

Обратное преобразование называется *внесением множителя под знак корня*: $2\sqrt{3}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{12}$ и т.д.

Пример 3.

Вынесите множитель из-под знака корня в выражениях:

а) $\sqrt{45}$; б) $\sqrt{\dfrac{5}{32}}$; в) $\sqrt{a^4b^7}$, $a \neq 0$; г) $\sqrt{\dfrac{a^9}{b^5}}$.

Решение:

а) $\sqrt{45}=\sqrt{3^2\cdot 5}=3\sqrt{5}$; б) $\sqrt{\dfrac{5}{32}}=\sqrt{\dfrac{5}{4^2\cdot 2}}=\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{5}{2}}$;

в) Так как $a \neq 0$, то из неравенства $a^4b^7 \geqslant 0$ следует, что $b \geqslant 0$. Значит,
$\sqrt{a^4b^7}=\sqrt{(a^2)^2(b^3)^2b}=|a^2|\cdot|b^3|\cdot\sqrt{b}=a^2b^3\sqrt{b}$;

г) $\sqrt{\dfrac{a^9}{b^5}}=\sqrt{\dfrac{(a^4)^2\cdot a}{(b^2)^2b}}=\dfrac{|a^4|}{|b^2|}\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{a^4}{b^2}\sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

Заметим, что начальное и конечное выражения определены при $\dfrac{a}{b} \geqslant 0$ ($b \neq 0$, числа a и b имеют одинаковый знак или $a = 0$). Ошибкой было бы написать в ответе $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ вместо $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$, так как числа a и b могут быть в отдельности и отрицательными.

К **141** Заполните таблицу:

a	0	0,5	−0,5	1	−1	2	−2	3	−3
a^2									

Почему в нижней строке таблицы не может быть отрицательных чисел?

142 Заполните таблицу:

k							
k^2	0	1	9	36	64	100	144

Сколько значений переменной k вы нашли, для $k^2 = 0$, для остальных случаев? Подчеркните неотрицательные значения переменной k.

143 Заполните таблицу, указав неотрицательные значения переменной x:

x									
x^2	2	3	5	6	7	8	10	11	a

1) Докажите методом от противного, что нет такого ***рационального*** числа, квадрат которого равен двум.

2) Удастся ли найти остальные рациональные значения переменной x? Как вы думаете, каким образом можно устранить возникшую проблему?

3) Прочитайте на стр. 38 об иррациональных числах и заполните таблицу.

144 Докажите, что число не является рациональным:

а) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$; б) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

145 Выберите верные равенства и обоснуйте свой ответ:

а) $\sqrt{100}=10$; в) $\sqrt{16}=-4$; д) $\sqrt{(-3)^2}=-3$; ж) $\left(\sqrt{m}\right)^2=m$, где $m \geqslant 0$;

б) $\sqrt{2,5}=0,5$; г) $\sqrt{0}=0$; е) $\left(\sqrt{3}\right)^2=3$; з) $\sqrt{(n)^2}=-n$, где $n<0$.

146 Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{900}$; д) $\left(\sqrt{10}\right)^2$; и) $\sqrt{225}\cdot\sqrt{81}$; н) $8\sqrt{64}$;

б) $\sqrt{0,36}$; е) $\left(5\sqrt{3}\right)^2$; к) $\sqrt{0,04}:\sqrt{0,000001}$; о) $0,1\sqrt{2\frac{1}{4}}+0,2\sqrt{1\frac{9}{16}}$;

в) $-\sqrt{1,69}$; ж) $\left(-7\sqrt{0,1}\right)^2$; л) $\sqrt{0,09}+\sqrt{0,0049}$; п) $0,2-\frac{1}{6}\sqrt{1,44}$;

г) $\sqrt{2\frac{7}{9}}$; з) $\left(\frac{\sqrt{8}}{2}\right)^2$; м) $\sqrt{0,04}-\sqrt{0,36}$; р) $\sqrt{\frac{4}{9}}-\sqrt{\frac{121}{169}}$.

147 Укажите, при каких значениях переменной выражение имеет смысл:

а) $\sqrt{d}$; б) $\sqrt{|d|}$; в) $\sqrt{-d}$; г) $\sqrt{3d-12}$; д) $\sqrt{d^2}$; е) $\sqrt{-d^2}$.

148 Вычислите:

а) $\left(\sqrt{2}\right)^2$; б) $\left(-2\sqrt{2}\right)^2$; в) $-2\left(\sqrt{2}\right)^2$; г) $-2\sqrt{(-2)^2}$; д) $\left(2\sqrt{2}\right)^4$; е) $\left(-2\sqrt{2}\right)^4$.

149 Вычислите:

а) $\sqrt{4\cdot9}$; $\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}$; б) $\sqrt{25\cdot4}$; $\sqrt{25}\cdot\sqrt{4}$; в) $\sqrt{16\cdot9}$; $\sqrt{16}\cdot\sqrt{9}$.

1) Что интересного вы наблюдаете? Сформулируйте гипотезу о свойстве корня из произведения и докажите ее.

2) Сопоставьте свой вывод со свойством 5 на стр. 39 учебника и примените его для нахождения значения произведения $\sqrt{24}\cdot\sqrt{6}$.

150 Вычислите:

а) $\sqrt{\frac{81}{9}}$; $\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{9}}$; б) $\sqrt{\frac{16}{4}}$; $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}}$; в) $\sqrt{\frac{4}{36}}$; $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{36}}$.

1) Что интересного вы наблюдаете? Сформулируйте гипотезу о свойстве корня из частного и докажите ее.

2) Сопоставьте свой вывод со свойством 6 на стр. 39 учебника и примените его для нахождения значения частного $\sqrt{24}:\sqrt{6}$.

151 Упростите:

а) $\sqrt{49\cdot25}$; б) $\sqrt{0,36\cdot0,04}$; в) $\sqrt{75\cdot108}$; г) $\sqrt{\frac{36}{121}}$; д) $\sqrt{14\frac{1}{16}}$.

152 Чем отличаются выражения в первой и во второй строке? Упростите их.

а) $\sqrt{5^2}$; в) $\sqrt{(-6)^2}$; д) $\sqrt{6^4}$; ж) $\sqrt{9^5}$; и) $\sqrt{(-3)^{2n}}$, $n\in\mathbf{N}$;

б) $\left(\sqrt{5}\right)^2$; г) $\left(\sqrt{6}\right)^2$; е) $\left(\sqrt{6}\right)^4$; з) $\left(\sqrt{9}\right)^5$; к) $\left(\sqrt{3}\right)^{2n}$, $n\in\mathbf{N}$.

153 Упростите:

а) $\sqrt{c^2}$; б) $\sqrt{c^2}$, $c<0$; в) $\sqrt{c^2}$, $c>0$;

г) $\sqrt{d^{100}}$; д) $\sqrt{a^{4n}}$; е) $\sqrt{50t^8}$;

ж) $-\dfrac{3}{0{,}7t^5}\sqrt{1{,}96b^{16}t^{14}}$; з) $-\dfrac{2}{5a^4}\sqrt{a^{10}m^6}$, $m<0$.

154 Вынесите множитель из-под знака корня: $\sqrt{a^2b}$, $a \neq 0$. Какие свойства корня вы использовали?

155 Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{18}$; б) $\sqrt{128}$; в) $\sqrt{\dfrac{27}{125}}$; г) $\sqrt{16a}$; д) $\sqrt{x^6y^{13}}$, $x \neq 0$; е) $\sqrt{\dfrac{x^{11}}{y^4}}$.

156 Внесите множитель под знак корня:

а) $3\sqrt{3}$; б) $-5\sqrt{2}$; в) $11b\sqrt{b}$; г) $4a^2\sqrt{5a}$.

157 Сравните числа:

а) $\sqrt{25}$ и $\sqrt{49}$; г) $\sqrt{2^2}$ и $\sqrt{5^2}$; ж) $\sqrt{20}$ и 4,5;

б) $\sqrt{5}$ и $\sqrt{7}$; д) $\sqrt{36}$ и 6; з) $-1{,}7$ и $-\sqrt{3}$;

в) $-\sqrt{2}$ и $-\sqrt{5}$; е) $\sqrt{2{,}25}$ и $1{,}(5)$; и) $-1{,}44$ и $-\sqrt{2}$.

158 Сравните:

а) $\sqrt{2a}$ и $\sqrt{2b}$, если $a<b$ ($a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$);

б) $\sqrt{-2a}$ и $\sqrt{-2b}$, если $a<b$ ($a \leqslant 0$ и $b \leqslant 0$);

в) $-\sqrt{-2a}$ и $-\sqrt{-2b}$, если $a \geqslant b$ ($a \leqslant 0$ и $b \leqslant 0$).

159 Что больше:

а) $3\sqrt{2}$ или $2\sqrt{3}$; б) $4\sqrt{3}$ или $3\sqrt{6}$; в) $6\sqrt{2}$ или $5\sqrt{3}$; г) $5\sqrt{19}$ или $3\sqrt{53}$?

160 Упростите:

а) $\sqrt{4+\sqrt{7}}\cdot\sqrt{4-\sqrt{7}}$; б) $2\sqrt{3}(\sqrt{12}+\sqrt{27})$.

161 Решите уравнение, используя определение арифметического квадратного корня:

а) $\sqrt{x}=5$; г) $9\sqrt{x}=9$; ж) $\sqrt{y-2}=2$;

б) $\sqrt{x}=12$; д) $\sqrt{x}=0$; з) $\sqrt{x+2}=-2$;

в) $2\sqrt{x}=28$; е) $\sqrt{x}=-5$; и) $\sqrt{y+1}=\sqrt{5}$.

162 Докажите, что значение выражения есть число рациональное:

а) $\left(3-\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{3}\right)$; в) $\dfrac{1}{5+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{5-\sqrt{5}}$;

б) $\left(7+2\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{2}-7\right)$; г) $\dfrac{1}{2\sqrt{7}+7}-\dfrac{1}{2\sqrt{7}-7}$.

163 Докажите, что значение выражения есть число иррациональное:

а) $\left(3+\sqrt{3}\right)^2$; в) $\dfrac{2}{1+\sqrt{6}}+\dfrac{3}{1+\sqrt{6}}$;

б) $\left(1-\sqrt{11}\right)^2$; г) $\dfrac{1}{1+\sqrt{6}}-\dfrac{1}{1-\sqrt{6}}$.

П **164** Выясните, сколько решений имеют данные системы в зависимости от значения параметра a, и решите их.

а) $\begin{cases} x+2y=a \\ 2x+3y=1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 4x+6y=2+a \\ 2x+3y=3 \end{cases}$; в) $\begin{cases} ax+y=2 \\ 2x+y=3 \end{cases}$.

165 Постройте график кусочно-линейной функции:

а) $y=\begin{cases}3x-1, \text{ если } x \geqslant 2;\\ 1-3x, \text{ если } x<2\end{cases}$ б) $y=\begin{cases}2x, \text{ если } x \geqslant -2;\\ -4, \text{ если } x<-2\end{cases}$

166 Разложите на множители:

а) $x^2 - 2x$; г) $4y^2 - 49z^2$; ж) $d^2 + 6dh^2 + 9h^4$; к) $s^3 + 27$;

б) $a^3b^2 - a^2b + ab$; д) $25m^4 - n^6$; з) $a^6 - 3a^3b^4 + 2{,}25b^8$; л) $z^6 - 125$;

в) $4kt - 6t^2 + 6k - 9t$; е) $32p^2q^8 - 2r^{10}$; и) $9 - 4p^2 + 4px - x^2$; м) $a^3c^3 + 8b^9$.

167 Выполните действия, применяя формулы сокращенного умножения:

а) $(2a + 3s)(2a - 3s)$; в) $(8t^2 - 5r)^2$; д) $(v - 1)(v^2 + v + 1)$;

б) $(y + 0{,}1x^2)(0{,}1x^2 - y)$; г) $(0{,}3d + \frac{2}{15}q^3)^2$; е) $(2w + 3c^2)(4w^2 - 6wc^2 + 9c^4)$.

168 Упростите выражение:

а) $|t|$, если $t \geqslant 0$; б) $|2 - b|$, если $b > 2$; в) $|6 - 0{,}5x|$, если $x < 12$.

Д **169** Составьте таблицу квадратов чисел от 10 до 20 и, используя ее, найдите значение выражения:

а) $\sqrt{144}+\sqrt{256}$; в) $\sqrt{289}\cdot\sqrt{361}$; д) $\left(\sqrt{1\frac{64}{225}}\right):\frac{2}{3}$;

б) $\sqrt{324}-\sqrt{625}$; г) $12\sqrt{1\frac{25}{144}}$; е) $-2\sqrt{4{,}41}+\sqrt{3{,}24}$.

170 Докажите, что число $\sqrt{2}+\sqrt{7}$ не является рациональным.

171 Сравните числа:

а) $\sqrt{81}$ и $\sqrt{64}$; г) $2{,}5$ и $\sqrt{6{,}25}$; ж) $-1{,}5$ и $-\sqrt{2}$;

б) $-\sqrt{3}$ и $-\sqrt{2}$; д) $\sqrt{1{,}69}$ и $1{,}(3)$; з) $-\sqrt{5}$ и $-2{,}5$;

в) $\sqrt{3^2}$ и $\sqrt{2{,}5^2}$; е) $\sqrt{121}$ и $3{,}3$; и) $4\sqrt{5}$ и $3\sqrt{9}$.

172 Упростите:

а) $\sqrt{81\cdot16}$; б) $\sqrt{125\cdot245}$; в) $\sqrt{27\frac{1}{25}}$; г) $\sqrt{2\cdot8^5}$; д) $\sqrt{27^3}$.

173 Упростите:

а) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{6}}$; б) $3\sqrt{2}\left(\sqrt{18}+\sqrt{32}\right)$.

174 Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{162}$; б) $\sqrt{\frac{50}{98}}$.

175 Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{u^7v^{12}}$, $v \neq 0$; б) $\sqrt{\frac{u^3}{v^8}}$.

176 Внесите множитель под знак корня:

а) $6\sqrt{6}$; б) $-9\sqrt{5}$; в) $1{,}2d\sqrt{d}$; г) $13z^2\sqrt{z}$.

177 Решите уравнения:

а) $\sqrt{y}=11$; б) $\sqrt{x+2}=3$; в) $\sqrt{y-1}=-3$; г) $\sqrt{x-2}=\sqrt{7}$.

178 Разложите на множители:

а) $m^5 - 4m^4$; в) $196y^2 - 49z^2$; д) $49s^2 + 14sc + c^2$; ж) $m^3 - 512$;

б) $24n^4k^3 + 72n^2k^2$; г) $d^3 - 9d$; е) $16x^4 - x^2y^2 + \frac{1}{64}y^4$; з) $27p^{15} - q^3$.

179 Выполните действия, применяя формулы сокращенного умножения:

а) $(0{,}2d + p)(0{,}2d - p)$; б) $(\frac{1}{3}h^3 - 15k)^2$; в) $(n - 4)(n^2 + 4n + 16)$.

180 Упростите выражение:

а) $|x|$, если $x < 0$; б) $|8 - y|$, если $y < 8$; в) $|9 - 1{,}8a|$, если $a \leqslant 5$.

С **181*** Докажите, что число $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ не является рациональным.

182* У крестьянина были коза, корова и кобыла, а еще стог сена и сын. Сын подсчитал, что этого сена хватит, чтобы кормить козу и кобылу один месяц, или козу и корову $\frac{3}{4}$ месяца, или же корову и кобылу $\frac{1}{3}$ месяца. Отец сказал, что сын плохо учится в школе. Объясните, почему он был вправе так сказать.

183* Назовем натуральное число *особым*, если оно представимо в виде $m^2 + 2n^2$, где m и n – целые числа. Докажите, что произведение двух особых чисел также особое число.

2. Преобразование выражений с корнями

Математика – это наука о хитроумных операциях, производимых по специально разработанным правилам над специально придуманными понятиями. Ясно, что особенно важная роль при этом отводится придумыванию новых понятий.

Юджин Пол Вигнер (1902–1995),
венгерский физик и математик

Свойства арифметического квадратного корня, с которыми мы познакомились, позволяют производить и более сложные преобразования выражений, содержащих корни. Разберем некоторые способы проведения таких преобразований с помощью следующих примеров.

Пример 1.
Упростите выражение: $\sqrt{3}+\sqrt{12}+\sqrt{48}$.
Решение:
Вынесем множители из-под знака корня, где это возможно:
$\sqrt{3}+\sqrt{12}+\sqrt{48}=\sqrt{3}+2\sqrt{3}+4\sqrt{3}$.

В полученном выражении все слагаемые содержат корни с одинаковыми подкоренными выражениями. Вынесем общий множитель $\sqrt{3}$ за скобки.

$\sqrt{3}+2\sqrt{3}+4\sqrt{3}=(1+2+4)\sqrt{3}=7\sqrt{3}$.

Как мы видим, такие выражения можно упрощать по аналогии с приведением подобных слагаемых: сложить коэффициенты и приписать «общий» корень.

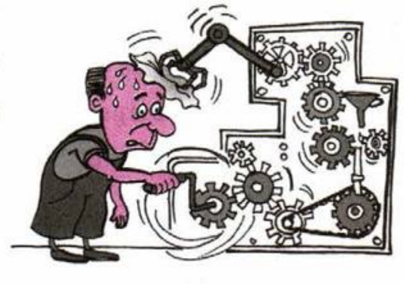
Пример 2.

Упростите выражения: а) $\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}$; б) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$; в) $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$.

Решение:

а) Упростим выражение $\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}$.

Из основного свойства квадратного корня следует, что $\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}=\left|2-\sqrt{5}\right|$. Чтобы раскрыть модуль, оценим знак выражения $2-\sqrt{5}$. Так как $2=\sqrt{4}$, а $4<5$, то из свойства 7 следует, что $\sqrt{4}<\sqrt{5}$, поэтому $2-\sqrt{5}<0$.



Значит, $\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}=\left|2-\sqrt{5}\right|=-\left(2-\sqrt{5}\right)=\sqrt{5}-2$.

Ответ: $\sqrt{5}-2$.

б) Упростим выражение $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$.

Представим подкоренное выражение в виде квадрата:

$11+6\sqrt{2}=11+2\cdot3\cdot\sqrt{2}=9+2+2\cdot3\cdot\sqrt{2}=3^2+\left(\sqrt{2}\right)^2+2\cdot3\cdot\sqrt{2}=\left(3+\sqrt{2}\right)^2$.

Значит, $\sqrt{11+6\sqrt{2}}=\sqrt{\left(3+\sqrt{2}\right)^2}=\left|3+\sqrt{2}\right|=3+\sqrt{2}$, так как $3+\sqrt{2}>0$.

Ответ: $3+\sqrt{2}$.

в) Упростим выражение $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$.

$$\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}=\sqrt{17-4\sqrt{5+4+4\sqrt{5}}}=\sqrt{17-4\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2+2^2+4\sqrt{5}}}=$$

$$=\sqrt{17-4\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2+2^2+2\cdot2\sqrt{5}}}=\sqrt{17-4\sqrt{\left(2+\sqrt{5}\right)^2}}=\sqrt{17-4\left|2+\sqrt{5}\right|}=\sqrt{17-4\left(2+\sqrt{5}\right)}=$$

$$=\sqrt{17-8-4\sqrt{5}}=\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2+2^2-2\cdot2\sqrt{5}}=\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}=\left|2-\sqrt{5}\right|=\sqrt{5}-2$$

При раскрытии модуля мы использовали то, что $2+\sqrt{5}>0$; $\sqrt{5}-2>0$.

Ответ: $\sqrt{5}-2$.

Пример 3.

Упростите выражения:

а) $\sqrt{(a-2)^2}+\sqrt{(a-4)^2}$ при $2\leqslant a\leqslant 4$;

б) $\sqrt{x^2-10x+25}+\sqrt{x^2-8x+16}$ при $x\leqslant 4$;

в) $\sqrt{a^2+a+4+\sqrt{a^2-6a+9}}$ при $a\geqslant 3$.

Решение:

а) Упростим выражение $\sqrt{(a-2)^2}+\sqrt{(a-4)^2}$ при $2\leqslant a\leqslant 4$.

По основному свойству корня можно записать:

$\sqrt{(a-2)^2}+\sqrt{(a-4)^2}=|a-2|+|4-a|$.

Раскрывая модули на заданном промежутке $2\leqslant a\leqslant 4$, получим:

$|a-2|=a-2$, так как $a-2\geqslant 0$;

$|a-4|=4-a$, так как $a-4\leqslant 0$.

Значит, $|a-2|+|4-a|=a-2+4-a=2$.

Ответ: 2.

б) Упростим выражение $\sqrt{x^2-10x+25}+\sqrt{x^2-8x+16}$ при $x \leqslant 4$.

Выполним преобразования, используя формулу квадрата разности:

$\sqrt{x^2-10x+25}+\sqrt{x^2-8x+16}=\sqrt{(x-5)^2}+\sqrt{(x-4)^2}$.

Продолжим преобразование, используя основное свойство корня:

$\sqrt{(x-5)^2}+\sqrt{(x-4)^2}=|x-5|+|x-4|$.

По условию $x \leqslant 4$, значит, $x-4 \leqslant 0$ и $x-5 \leqslant 0$. Поэтому

$|x-5|+|x-4|=5-x+4-x=9-2x$.

Ответ: $9-2x$.

в) Упростим выражение $\sqrt{a^2+a+4+\sqrt{a^2-6a+9}}$ при $a \geqslant 3$.

Выполним преобразования, используя формулы сокращенного умножения, основное свойство корня и правила раскрытия модуля:

$$\sqrt{a^2+a+4+\sqrt{a^2-6a+9}}=\sqrt{a^2+a+4+\sqrt{(a-3)^2}}=\sqrt{a^2+a+4+|a-3|}=$$

$$=\sqrt{a^2+a+4+a-3}=\sqrt{a^2+2a+1}=\sqrt{(a+1)^2}=|a+1|=a+1.$$

При раскрытии модулей мы использовали то, что $a \geqslant 3$, значит, $a-3 \geqslant 0$ и $a+1 \geqslant 0$.

Ответ: $a+1$.

Иногда выражение, содержащее в знаменателе квадратные корни, требуется привести к виду, содержащему квадратные корни только в числителе. О таком преобразовании говорят – избавиться от иррациональности в знаменателе дроби.

Пример 4.

Избавьтесь от иррациональности в знаменателе:

а) $\frac{5}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{7}{\sqrt{2}+1}$; в) $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; г) $\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{7}}$.

Решение:

а) $\frac{5}{\sqrt{3}}=\frac{5\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$;

б) $\frac{7}{\sqrt{2}+1}=\frac{7\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}=\frac{7\sqrt{2}-7}{\left(\sqrt{2}\right)^2-1^2}=\frac{7\sqrt{2}-7}{2-1}=7\sqrt{2}-7$;

в) $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}=\frac{3\sqrt{5}+3\sqrt{3}}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{3\sqrt{5}+3\sqrt{3}}{5-3}=\frac{3\sqrt{5}+3\sqrt{3}}{2}$.

В двух последних примерах мы домножили числитель и знаменатель на выражение, «сопряженное» знаменателю (т.е. на разность соответствующих корней, если в знаменателе стоит сумма, или на сумму корней, если в знаменателе стоит разность). Мы воспользовались тем, что произведение суммы двух корней на их разность равно разности квадратов этих корней, т.е. рациональному числу.

г) Для выражения $\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{7}}$ применим этот же прием дважды:

$$\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{7}}=\frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{7})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{7})(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{7})}=\frac{5\sqrt{3}+5\sqrt{2}-5\sqrt{7}}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}=\frac{5\sqrt{3}+5\sqrt{2}-5\sqrt{7}}{3+2\sqrt{6}+2-7}=$$

$$=\frac{5\sqrt{3}+5\sqrt{2}-5\sqrt{7}}{2\left(\sqrt{6}-1\right)}=\frac{\left(5\sqrt{3}+5\sqrt{2}-5\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{6}+1\right)}{2\left(\sqrt{6}-1\right)\left(\sqrt{6}+1\right)}=\frac{5\sqrt{18}+5\sqrt{12}-5\sqrt{42}+5\sqrt{3}+5\sqrt{2}-5\sqrt{7}}{2\left(\left(\sqrt{6}\right)^2-1^2\right)}=$$

$$=\frac{5\sqrt{9\cdot2}+5\sqrt{4\cdot3}-5\sqrt{42}+5\sqrt{3}+5\sqrt{2}-5\sqrt{7}}{2(6-1)}=\frac{5\cdot3\sqrt{2}+5\cdot2\sqrt{3}-5\sqrt{42}+5\sqrt{3}+5\sqrt{2}-5\sqrt{7}}{2\cdot5}=$$

$$=\frac{20\sqrt{2}+15\sqrt{3}-5\sqrt{42}-5\sqrt{7}}{10}=\frac{4\sqrt{2}+3\sqrt{3}-\sqrt{42}-\sqrt{7}}{2}.$$

Пример 5.

Упростить выражение: $\sqrt{\dfrac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}}$.

Решение:

$$\sqrt{\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)}{\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)}}=\sqrt{\frac{\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)^2}{\left(3\sqrt{2}\right)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}}=\frac{\sqrt{\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)^2}}{\sqrt{18-12}}=$$

$$=\frac{\left|3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right|}{\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\frac{\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\sqrt{6}}{6}=\frac{3\sqrt{12}-2\sqrt{18}}{6}=\frac{6\sqrt{3}-6\sqrt{2}}{6}=\sqrt{3}-\sqrt{2}.$$

При раскрытии модуля мы использовали то, что $3\sqrt{2}=\sqrt{18}>\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

Пример 6.

Сравнить числа:

а) $3\sqrt{5}$ и $4\sqrt{3}$; б) $1+\sqrt{13}$ и $\sqrt{21}$; в) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ и $\sqrt{6}-\sqrt{5}$.

Основное тождество $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$ дает нам идею для выполнения этого задания: возведение в квадрат позволяет перейти от иррационального числа к рациональному, а рациональные числа сравнивать мы умеем. Осталось проверить, будет ли возведение в квадрат обеих частей неравенства равносильным преобразованием. Нам известно, что если для положительных чисел a и b имеет место неравенство $a > b$, то $a^2 > b^2$; если $a < b$, то $a^2 < b^2$; если $a = b$, то $a^2 = b^2$. Поэтому для положительных чисел a и b: $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$; $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$.

Обозначим неизвестный пока знак неравенства ($>$ или $<$) символом $\vee$ и будем проводить равносильные преобразования неравенства до тех пор, пока этот знак не станет для нас очевидным. Ясно, что полученный в итоге знак будет совпадать со знаком исходного неравенства.

Решение:

а) $3\sqrt{5}\vee4\sqrt{3}$.

Возведем обе части неравенства в квадрат, получим равносильное неравенство $\left(3\sqrt{5}\right)^2\vee\left(4\sqrt{3}\right)^2$, т.е. $45\vee48$. Так как $45<48$, то $3\sqrt{5}<4\sqrt{3}$.

б) $1+\sqrt{13}\vee\sqrt{21} \quad\Leftrightarrow\quad \left(1+\sqrt{13}\right)^2\vee\left(\sqrt{21}\right)^2 \quad\Leftrightarrow\quad 1+13+2\sqrt{13}\vee21$.

Вычтем из обеих частей неравенства число 14, получим

$1+13+2\sqrt{13}-14\vee21-14$.

Тогда $2\sqrt{13}\vee7 \quad\Leftrightarrow\quad \left(2\sqrt{13}\right)^2\vee7^2 \quad\Leftrightarrow\quad 52\vee49$. Так как $52>49$, то $1+\sqrt{13}>\sqrt{21}$.

в) $\sqrt{3}-\sqrt{2}\vee\sqrt{6}-\sqrt{5}$.

Так как обе части неравенства положительны, можно их возвести в квадрат, и знак неравенства не изменится. Но в общем случае требуется проверка положительности или отрицательности обоих выражений. Чтобы не проводить эту проверку, можно просто перенести отрицательные члены выражений в другую часть неравенства с противоположным знаком. Полученное неравенство будет иметь тот же знак, и все его члены станут положительными:

$\sqrt{3}+\sqrt{5} \vee \sqrt{6}+\sqrt{2} \;\Leftrightarrow\; \left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2 \vee \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2 \;\Leftrightarrow\; 3+5+2\sqrt{15} \vee 6+2+2\sqrt{12} \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; 8+2\sqrt{15} \vee 8+2\sqrt{12} \;\Leftrightarrow\; 2\sqrt{15} \vee 2\sqrt{12}.$

После деления обеих частей неравенства на 2 получим равносильное неравенство $\sqrt{15} \vee \sqrt{12}$. $\sqrt{15} > \sqrt{12}$, т.к. $15 > 12$. Значит, $\sqrt{3}-\sqrt{2} > \sqrt{6}-\sqrt{5}$.

* * *

Пример 7.

Доказать, что для любых a и b верно $|a+b| \leqslant |a|+|b|$.

Доказательство:

Пусть $x = |a+b|$; $y = |a|+|b|$.

Для любого числа c имеет место неравенство $c \leqslant |c|$. Действительно, если $c \geqslant 0$, то $c = |c|$; а если $c < 0$, то $|c| > 0$ и, значит, $c < |c|$).

Возведем в квадрат число x и используем установленное соотношение $c \leqslant |c|$. Получим:

$x^2 = |a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leqslant a^2 + 2|ab| + b^2 = (|a|+|b|)^2 = y^2.$

Значение модуля – число неотрицательное, поэтому $x = |a+b| \geqslant 0$, $y = |a|+|b| \geqslant 0$. Следовательно, по основному свойству корня, $x = \sqrt{x^2}$, $y = \sqrt{y^2}$. Поэтому из неравенства $\sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{y^2}$ следует $x = \sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{y^2} = y$. Значит, $x \leqslant y$, что и требовалось доказать.

Приведенный пример показал, что квадратный корень помогает и при доказательстве даже тех тождеств, которые, казалось бы, никак не связаны с квадратными корнями.

Аналогичным образом, используя определение арифметического квадратного корня, можно доказать и другие свойства модулей, такие, как $|ab| = |a|\cdot|b|$; $|a^n| = |a|^n$, $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, и др.

К **184** Какие из данных утверждений являются верными?

а) Если $a \geqslant 0$, то $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$;

б) $\forall\, a \in \boldsymbol{R}$: $\sqrt{a^2} = a$;

в) $\forall\, a \in \boldsymbol{R}$: $\sqrt{a^2} = |a|$;

г) $x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$;

д) Если $a > b$, то $a^2 > b^2$;

е) $\forall\, a \in \boldsymbol{R}$: $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$;

ж) $(a+b)\cdot c = ac + bc$;

з) Если $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, то $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right) = a-b$.

185 Представьте число в виде квадрата:

а) 4; б) 7; в) -9; г) b, где $b \geqslant 0$; д) $9d$, где $d \geqslant 0$.

186 Выполните действия, используя формулы сокращенного умножения:

а) $\left(5+\sqrt{a}\right)\left(5-\sqrt{a}\right)$;

б) $\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$;

в) $\left(3\sqrt{t}-4\sqrt{s}\right)\left(3\sqrt{t}+4\sqrt{s}\right)$;

г) $\left(1+\sqrt{m}\right)^2$;

д) $\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)^2$;

е) $\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)^2$;

ж) $\left(2\sqrt{x}-7\sqrt{y}\right)^2$;

з) $\left(1-\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt{a}+a\right)$;

и) $\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)\left(m-\sqrt{mn}+n\right)$.

187 Разложите на множители:

а) $36 + 6b$;

б) $10 + b\sqrt{10}$;

в) $a\sqrt{14}-\sqrt{7a}$;

г) $x^2 - 9$;

д) $x^2 - 5$;

е) $64y - 7$, $y \geqslant 0$;

ж) $z^2 - 12zt + 36t^2$;

з) $n + 2\sqrt{nk} + k$, $n, k \geqslant 0$;

и) $225a - 120\sqrt{ab} + 16b$, $a, b \geqslant 0$.

На какие группы можно разбить эти задания?

188 а) Подчеркните общий множитель в выражениях: $2\sqrt{5}$; $6\sqrt{5}$; $3\sqrt{5}$. Назовите множители, которыми они отличаются.

б) Прочитайте выражение: $2\sqrt{5}+6\sqrt{5}-3\sqrt{5}$. Какое из верных утверждений задания № 184 потребуется для упрощения этого выражения с корнями?

в) Проанализируйте выражения: $\sqrt{3}+2\sqrt{3}$; $4\sqrt{a}-2\sqrt{a}$; $2\sqrt{7}-6\sqrt{7}-4\sqrt{7}$. Сформулируйте способ, с помощью которого можно упрощать подобные выражения. Выполните преобразования.

189 Упростите выражение:

а) $3\sqrt{3}+\sqrt{27}$; в) $4\sqrt{a}+5\sqrt{b}-3\sqrt{a}+\sqrt{b}$;

б) $\sqrt{20}-\sqrt{5}$; г) $\sqrt{28}+\sqrt{5}-\sqrt{45}+\sqrt{63}$.

190 а) Прочитайте выражение: $\sqrt{x^2+2xy+y^2}$. Какие из верных утверждений задания № 184 нужно использовать для упрощения этого выражения. Как упростить выражение $\sqrt{x^2-2xy+y^2}$?

б) Проанализируйте выражения: $\sqrt{4a^2+4a+1}$; $\sqrt{9-6a+a^2}$; $\sqrt{1-2a+a^2}$. Сформулируйте способ, с помощью которого можно упрощать подобные выражения. Выполните преобразования. Раскройте модуль, если $1<a<3$.

191 Упростите: $\sqrt{\left(x^2+4\right)^2-16x^2}$ при $-2\leqslant x\leqslant 2$.

192 Упростите выражение:

а) $\sqrt{\left(\sqrt{6}-6\right)^2}+\sqrt{6}$; б) $\sqrt{\left(3-\sqrt{10}\right)^2}+\sqrt{\left(4-\sqrt{10}\right)^2}$; в) $\sqrt{\left(1-\sqrt{5}\right)^2}-\left(1-\sqrt{5}\right)^2$.

193 Проанализируйте выражения. Какие из них имеют одинаковые значения:

а) $\sqrt{\left(2+\sqrt{7}\right)^2}$; б) $\sqrt{2^2+2\cdot 2\sqrt{7}+\left(\sqrt{7}\right)^2}$; в) $\sqrt{4+4\sqrt{7}+7}$; г) $\sqrt{11+4\sqrt{7}}$.

Как можно использовать эти равенства для упрощения последнего выражения?

194 Упростите:

а) $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$; б) $\sqrt{8-2\sqrt{7}}$; в) $\sqrt{18-8\sqrt{2}}$.

195 Упростите:

а) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}\cdot\left(3-\sqrt{2}\right)$; б) $\sqrt{7+\sqrt{24}}+6-\sqrt{6}$; в) $\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{24}}+\sqrt{5-\sqrt{24}}}{\sqrt{5+\sqrt{24}}-\sqrt{5-\sqrt{24}}}$.

196 Избавьтесь от иррациональности в знаменателе:

а) $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$; б) $\dfrac{3}{3+\sqrt{3}}$; в) $\dfrac{5}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; г) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.

197 Сравните числа:

а) $4\sqrt{5}$ и 9; б) $2+\sqrt{10}$ и $\sqrt{26}$; в) $\sqrt{7}-\sqrt{5}$ и $2\sqrt{2}-\sqrt{6}$.

198 Выпишите числа в порядке возрастания:

9; 10; $7\sqrt{2}$; $5\sqrt{3}$; $4\sqrt{5}$; $3\sqrt{11}$; $2\sqrt{26}$; $\sqrt{95}$.

199 Вычислите устно, разложив на множители подкоренное выражение:

а) $\sqrt{66^2+88^2}$; б) $\sqrt{36^2+48^2}$.

200 Расположите числа в порядке возрастания: $\dfrac{1}{3}$; $\sqrt{\dfrac{25}{49}}$; $\sqrt{0{,}01}$; $\dfrac{3}{8}$; 0,6.

П **201** При каких значениях параметра a функция $y = (2a + 3)x^3 + (5 - 3a)x^{10}$ является:
а) четной; б) нечетной?

202 1) Постройте график функции $y = x^2$ для $x \in [0; +\infty)$. Используя построенный график, выполните следующие задания:
а) Найдите значения функции при $x = 1$; $x = 4$. Отметьте точку графика с абсциссой, равной 2.
б) Найдите значения аргумента при $y = 1$; $y = 4$; $y = 9$. Отметьте точку графика с ординатой, равной 2.

2) Постройте график функции $y = x^3$ для $x \in (-\infty; 0]$. Используя построенный график, выполните следующие задания:
а) Найдите значения функции при $x = -1$; $x = -2$. Отметьте точку графика с абсциссой, равной $-1{,}5$.
б) Найдите значения аргумента при $y = 0$; $y = -8$. Отметьте точку графика с ординатой, равной $-1{,}5$.

3) Можно ли назвать функции, рассмотренные в этом задании, четными или нечетными. Почему?

Д **203** Упростите:

а) $\sqrt{\left(4-\sqrt{13}\right)^2}$; в) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$; д) $\sqrt{x^2-2x+1}$, при $x > 1$;

б) $\sqrt{\left(10-\sqrt{101}\right)^2}$; г) $\sqrt{32+10\sqrt{7}}$; е) $x+\sqrt{x^2-2x+1}$, при $x < 1$.

204 Упростите:

а) $4\sqrt{2}-3\sqrt{8}+2\sqrt{32}$; в) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{27}\right)\cdot\sqrt{3}$;

б) $3\sqrt{5}-2\sqrt{45}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}$; г) $\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}+1\right)\left(1-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)$.

205 Избавьтесь от иррациональности в знаменателе:

а) $\dfrac{7}{\sqrt{11}}$; в) $\dfrac{5}{3-\sqrt{14}}$; д) $\dfrac{3}{2\sqrt{2}+\sqrt{5}}$; ж) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}$;

б) $-\dfrac{2}{\sqrt{12}}$; г) $\dfrac{7}{3+\sqrt{17}}$; е) $\dfrac{5}{3\sqrt{3}-\sqrt{7}}$; з) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{10}}$.

206 Сравните числа:

а) $4\sqrt{14}$ и 15; в) $\sqrt{17}-\sqrt{15}$ и $\sqrt{19}-\sqrt{17}$;

б) $1+\sqrt{20}$ и $\sqrt{30}$; г) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ и $\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

207 Выпишите числа в порядке возрастания:

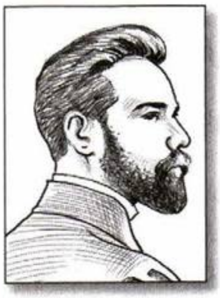
12; 11; $8\sqrt{2}$; $6\sqrt{3}$; $5\sqrt{5}$; $4\sqrt{7}$; $\sqrt{130}$.

С **208*** Найдите все значения a, для которых выражения $a+\sqrt{15}$ и $\dfrac{1}{a}-\sqrt{15}$ принимают целые значения.

209* Упростите $2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$.

210* Упростите $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$.

3. График функции $y=\sqrt{x}$

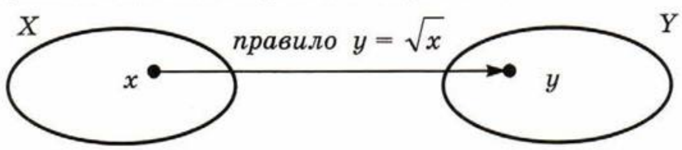


Есть тонкие властительные связи
Меж контуром и запахом цветка.

Валерий Яковлевич Брюсов (1873–1924),
русский поэт, драматург

В предыдущем пункте мы узнали новую операцию – извлечение арифметического квадратного корня из числа. Чтобы квадратный корень помогал нам описывать реальные процессы окружающего мира, познакомимся с соответствующей функцией и выявим ее свойства.

Рассмотрим правило, устанавливающее соответствие между множествами неотрицательных чисел X и Y следующим образом: любому неотрицательному числу x поставим в соответствие арифметический квадратный корень из этого числа x.



Теоремы о существовании и единственности арифметического квадратного корня позволяют утверждать, что для каждого элемента из X *существует единственный* элемент из Y. Значит, мы говорим о функции.

Исходя из определения арифметического квадратного корня, ясно, что извлекать корень можно только из неотрицательных чисел, поэтому областью определения функции $y=\sqrt{x}$ является множество $[0; +\infty)$. Значением арифметического корня также является неотрицательное число, следовательно, областью значений также является множество $[0; +\infty)$.

Задавая произвольные значения x и вычисляя по формуле $y=\sqrt{x}$, построим таблицу.

x	0	0,25	1	2,25	4	6,25
y	0	0,5	1	1,5	2	2,5

Воспользовавшись таблицей, изобразим график этой функции. Полученная кривая изображена на рис. 1.

Отметим свойства полученного графика.

Свойство 1. При неограниченном возрастании x значение y также неограниченно возрастает, но значительно медленнее значения x.

Так, пока значения x выросли от 0 до 4, значения y увеличились только от 0 до 2.

Свойство 2. При уменьшении значений x до нуля значения y, оставаясь положи-

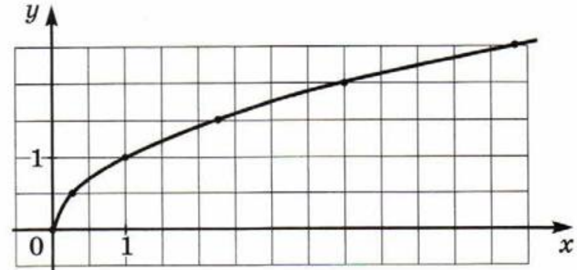


Рис. 1

тельными, также уменьшаются до нуля, но опять-таки значительно медленнее значений x.

Вследствие свойства 2 кривая при приближении к нулю «прижимается» к оси ординат. Поэтому можно выделить еще одно важное свойство функции $y=\sqrt{x}$.

Свойство 3. График $y=\sqrt{x}$ касается оси ординат в точке (0; 0).

Можно доказать, что график $y=\sqrt{x}$ является правой ветвью параболы, которую симметрично отобразили относительно прямой $y = x$.

* * *

Действительно равенство $y=\sqrt{x}$ означает, что $x = y^2$, причем $y \geqslant 0$. Поэтому, если поменять местами x и y ($x \leftrightarrow y$), получим $y = x^2$, $x \geqslant 0$. Эти соотношения задают правую половину параболы $y = x^2$. Так как замена $x \leftrightarrow y$ соответствует симметричному отображению координатной плоскости относительно биссектрисы I и III координатных углов (прямой $y = x$), то график $y=\sqrt{x}$ получается из правой половины параболы $y = x^2$, $x \geqslant 0$, при помощи такого симметричного отображения (рис. 2).

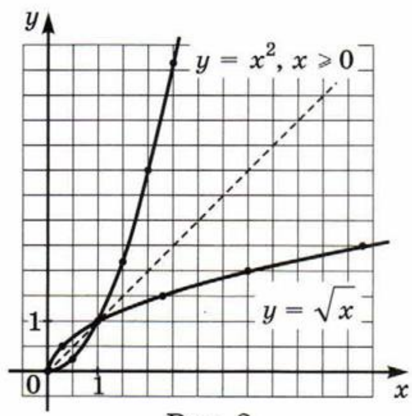


Рис. 2

Таким образом, три выявленных нами свойства графика $y=\sqrt{x}$ можно было вывести из известных нам свойств графика $y = x^2$. Вместе с тем, функция $y=\sqrt{x}$ имеет и целый ряд существенных отличий от функции $y = x^2$.

Например, в формулу $y=\sqrt{x}$ нельзя вместо x подставить $-x$, так как ее область определения состоит из неотрицательных чисел, среди которых нет противоположных друг другу. А значит, график $y=\sqrt{x}$ не обладает симметричностью ни относительно оси абсцисс, ни относительно начала координат.

Свойство 4. Функция $y=\sqrt{x}$ не является ни четной, ни нечетной.

Свойство 5. Функция $y=\sqrt{x}$ возрастает на всей своей области определения.

Анализируя выявленные нами свойства графика функции $y=\sqrt{x}$, мы можем записать следующий *алгоритм построения графика* $y=\sqrt{x}$.

Алгоритм построения графика $y=\sqrt{x}$

1. Заполнить таблицу, задав несколько «удобных» неотрицательных значений x и вычислив соответствующие им значения y по формуле $y=\sqrt{x}$.

x	0	1			
y	0	1			

2. Отметить на координатной плоскости точки с координатами (x; y), полученными в таблице.

3. Соединить полученные точки плавной линией, учитывая, что при малых x график «прижимается» к оси ординат и касается ее в точке (0; 0).

Рассмотренная нами функция $y=\sqrt{x}$ позволяет описывать реальные процессы и помогает решать практические задачи.

Пример 1.

Тело начинает свободное падение с нулевой начальной скоростью и в течение времени t секунд преодолевает расстояние s м. Написать формулу и построить график зависимости t от s. За какое время свободно падающее тело пройдет путь, равный 10 см?

Решение:

1. При свободном падении тела с нулевой начальной скоростью пройденный путь вычисляется по формуле $s=\frac{gt^2}{2}$, где s измеряется в метрах, время t в секундах, ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.

2. $s=\frac{gt^2}{2} \;\Leftrightarrow\; 2s=gt^2 \;\Leftrightarrow\; t^2=\frac{2s}{g}$. Так как $t^2=\frac{2s}{g}$ и $t \geqslant 0$, то $t=\sqrt{\frac{2s}{g}}=\sqrt{\frac{2s}{9{,}8}}=\sqrt{\frac{s}{4{,}9}}$.

3. Заполним таблицу по формуле $t=\sqrt{\frac{s}{4{,}9}}$ и построим график этой функции (рис. 3).

s	1	5	10	15
t	0,45	1,01	1,42	1,74

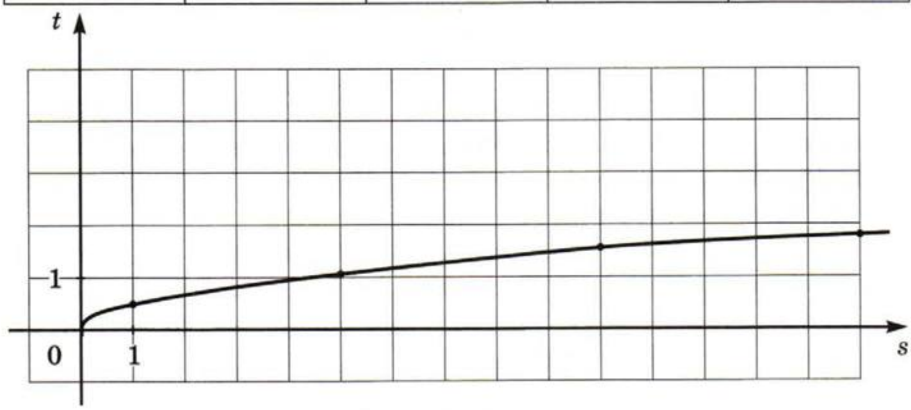


Рис. 3

4. Выразим заданный путь в метрах и вычислим искомое значение t:

$$s = 10 \text{ см} = 0{,}1 \text{ м}, \quad t=\sqrt{\frac{0{,}1}{4{,}9}}=\sqrt{\frac{1}{49}}=\frac{1}{7} \text{ (сек)}.$$

* * *

Пример 2.

Построить график функции $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Решение:

Областью определения функции является множество $X = (0; +\infty)$, областью значений $Y = (0; +\infty)$.

Построим таблицу и график этой функции (рис. 4).

x	0,25	1	2,25	4	6,25
y	2	1	0,67	0,5	0,4

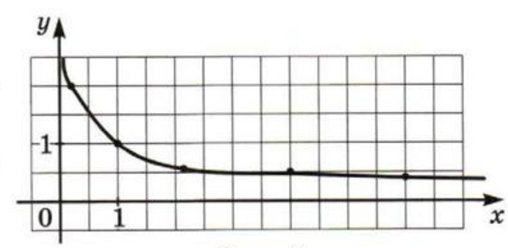


Рис. 4

Пример 3.

Электрические заряды q_1 и q_2, равные 1 кулону, находятся на расстоянии r метров и взаимодействуют с силой F ньютонов. Написать формулу и построить график зависимости r от F. На каком расстоянии находятся друг от друга эти заряды, если сила взаимодействия между ними равна 1 ньютону?

Решение:

1. Сила взаимодействия между двумя электрическими зарядами в системе СИ выражается формулой $F = k\dfrac{q_1q_2}{r^2}$, где $k = 9 \cdot 10^9$, сила F измеряется в ньютонах, расстояние между зарядами r – в метрах, величины зарядов q_1, q_2 – в кулонах. Если $q_1 = q_2 = 1$ (в системе СИ), то $F = \dfrac{k}{r^2} \Leftrightarrow r^2 = \dfrac{k}{F}$.

2. Так как $r^2 = \dfrac{k}{F}$ и $r \geqslant 0$, то $r = \sqrt{\dfrac{k}{F}} = \sqrt{\dfrac{9 \cdot 10^9}{F}} = \sqrt{\dfrac{90 \cdot 10^8}{F}} = 10^4 \dfrac{\sqrt{90}}{\sqrt{F}}$.

3. $\sqrt{90} = 9{,}4868...$, поэтому будем считать, что $\sqrt{90} \approx 9{,}5$, тогда $r = 10^4 \dfrac{9{,}5}{\sqrt{F}} = \dfrac{95 \cdot 10^3}{\sqrt{F}}$.

4. Построим таблицу по формуле $r = \dfrac{95}{\sqrt{F}}$ (значения F – в ньютонах, значения r – перевели в километры) и изобразим график зависимости r от F (рис. 5).

F	0,25	1	2,25	4	6,25
r	190	95	63,3	47,5	20,1

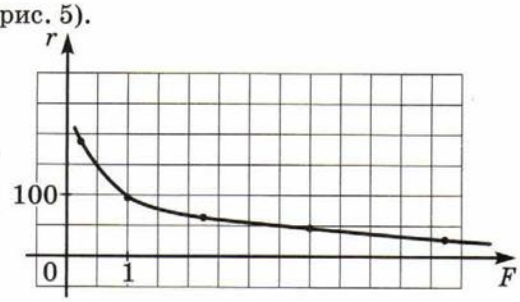


Рис. 5

5. Найдем расстояние, на котором находятся друг от друга заряды, сила взаимодействия F между которыми равна 1 ньютону.

Если $F = 1$ ньютон, то $r = \dfrac{95 \cdot 10^3}{\sqrt{1}} = 95 \cdot 10^3$.

Как мы видим 1 кулон – это большой заряд: два заряда в 1 кулон на расстоянии почти 100 км взаимодействуют с ощутимой силой 1 ньютон (таков, например, вес тела массой примерно в 100 г).

К **211** Вычислите устно: $\dfrac{\sqrt{16} + \sqrt{0{,}25} + \sqrt{4} - \sqrt{2{,}25}}{\sqrt{25}}$.

Сформулируйте определение, которым нужно пользоваться, чтобы вычислить значение арифметического квадратного корня.

212 1) Площадь квадрата со стороной a см составляет S см^2. Запишите формулу зависимости a в см от S в см^2.

2) Можно ли вычислить неотрицательное число, если известен его квадрат? Запишите формулу, с помощью которой можно это сделать, обозначив искомое число буквой k, а его квадрат – c.

3) Какой единой обобщенной формулой можно записать две предыдущие зависимости? Докажите, что эта зависимость является функциональной.

4) Задайте эту функцию таблично:

x	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
y							

5) Постройте график функции, используя полученную таблицу. Сравните его с графиком $y = \sqrt{x}$, изображенным на стр. 52 учебника.

6) Какие свойства графика вы можете отметить? Сопоставьте их со свойствами на стр. 52–53 учебника. Какие из указанных в учебнике свойств вам удалось выявить самостоятельно?

213 Пользуясь графиком функции $y = \sqrt{x}$, найдите значение:

1) x, при котором $\sqrt{x} = 0;\ 1;\ 2;\ 2{,}5$;

2) $\sqrt{x}$, при $x = 0;\ 1;\ 2;\ 2{,}5$.

214 Постройте график функции $y=\sqrt{x}$. Пользуясь графиком, найдите приближенные значения корней и выполните сравнение:

а) $\sqrt{2}$ и 1,1; б) $\sqrt{3}$ и 1,5; в) $\sqrt{5}$ и 2,1; г) $\sqrt{6}$ и 2,5.

Какой масштаб целесообразно выбрать для построения графика?

215 Начертите графики функций $y = x$ и $y=\sqrt{x}$ и, пользуясь построенными графиками, сравните числа:

а) b и $\sqrt{b}$, если $0 < b < 1$;

б) b и $\sqrt{b}$, если $b > 1$.

Что можно сказать про значения чисел в точках пересечения графиков?

П **216** Вычислите устно:

а) $\dfrac{\sqrt{16}\cdot\sqrt{1{,}6}\cdot\sqrt{0{,}16}\cdot\sqrt{0{,}016}}{\sqrt{36}\cdot\sqrt{3{,}6}\cdot\sqrt{0{,}36}\cdot\sqrt{0{,}036}}$; б) $\dfrac{\sqrt{17}\cdot\sqrt{1{,}7}\cdot\sqrt{0{,}17}\cdot\sqrt{0{,}017}}{\sqrt{0{,}0017}\cdot\sqrt{0{,}00017}\cdot\sqrt{0{,}000017}\cdot\sqrt{0{,}0000017}}$.

217 Решите устно. Сколько множителей в числителе, если

$$\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\ldots\cdot\sqrt{5}}{5^5}=5.$$

218 Решите устно. При каких значениях a справедливо равенство $13\sqrt{a}=a\sqrt{13}$?

219 Период T колебаний маятника равен $2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, где l – длина маятника, g – ускорение свободного падения. Сравните периоды качания маятников, длины которых относятся как 9 : 4.

220 Определите, какое слово или словосочетание («необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно») надо поставить вместо многоточия, чтобы высказывание стало истинным.

а) Для того чтобы натуральное число a оканчивалось на четную цифру, ..., чтобы натуральное число a делилось на 4.

б) Для того чтобы натуральное число a было составным, ..., чтобы натуральное число a делилось на 6.

в) Для того чтобы натуральное число n делилось на 9, ..., чтобы натуральное число n делилось на 3.

г) Для того чтобы натуральные числа a и b были равны, ..., чтобы квадраты натуральных чисел a и b были равны.

221 Решите уравнение:

а) $5x(x-7)=0$; б) $(x^2-4)(2x+3)=0$; в) $x^2-12x+20=0$.

Д **222** Постройте график функции $y=\sqrt{x}$ и, пользуясь им, найдите приближенное значение:

а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{5}$; г) $\sqrt{6}$.

223 1) Сосулька отваливается и падает с крыши. Постройте график зависимости скорости, с которой сосулька упадет на землю, от высоты крыши. Скорость и перемещение сосульки зависит от времени следующим образом: $v = gt$, $s=\dfrac{gt^2}{2}$, где g – ускорение свободного падения, которое можно считать равным 10 м/с^2.

2) Какая будет скорость сосульки у поверхности земли, если высота крыши равна 20 метрам?

3) Во сколько раз увеличится скорость, если высота увеличится в 2 раза?

224 Вычислите: $\dfrac{\sqrt{10,24}-\sqrt{0,25}-\sqrt{441}+\sqrt{1,69}}{\sqrt{289}}$.

225 Вычислите:

а) $\dfrac{\sqrt{400}\cdot\sqrt{40}\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{0,4}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{0,2}\cdot\sqrt{0,002}\cdot\sqrt{0,002}}$; б) $\dfrac{\sqrt{23}\cdot\sqrt{2,3}\cdot\sqrt{0,23}\cdot\sqrt{0,023}}{\sqrt{0,002}\cdot\sqrt{0,0002}\cdot\sqrt{0,00002}\cdot\sqrt{0,000002}}$.

226 Сколько множителей в числителе, если

$$\frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}\cdot\ldots\cdot\sqrt{7}}{49^7}=7^{49}.$$

227 Решите уравнение:

а) $x(x^2-9)(-3x+15)=0$; б) $x^2-6x+7=0$.

C **228*** Две крестьянки принесли на рынок вместе 100 одинаковых яиц, одна больше, чем другая, но обе выручили одинаковую сумму денег. Первая сказала тогда второй: «Будь у меня столько яиц, сколько у тебя, я выручила бы за них 270 рублей». Вторая ответила: «А будь твои яйца у меня, я получила бы за них всего 120 рублей». Сколько яиц было у каждой?

229* Найдите какие-нибудь два последовательных 100-значных числа, такие, что сумма цифр каждого из них – точный квадрат.

230* Из произведения всех натуральных чисел от 1 до 1812 вычеркнули все числа, делящиеся на 5. Какой цифрой будет оканчиваться произведение оставшихся чисел?

4.* Приближенное вычисление квадратного корня

В природе существует много такого, что не может быть ни достаточно глубоко понято, ни достаточно убедительно доказано, ни достаточно умело и надежно использовано на практике без помощи вмешательства математики.

Френсис Бэкон (1561–1626),
английский философ и мыслитель

Как мы уже видели, квадратные корни из рациональных чисел часто являются иррациональными числами, то есть представляются бесконечными непериодическими десятичными дробями. Поэтому их значение можно вычислить лишь приближенно. Для этого обычно используют технику. Обычный микрокалькулятор, рассчитывающий девять знаков после запятой, даст значение $\sqrt{2}=1,414213562\ldots$

Вопрос об алгоритмах приближенного вычисления квадратного корня сегодня может показаться не имеющим смысла. Какой там алгоритм – нажмем на кнопку, вот тебе результат! Нужна бо́льшая точность – бери более мощный калькулятор или садись за компьютер.

Но так было не всегда. Еще лет 30 тому назад микрокалькуляторы, не говоря уже о компьютерах, только входили в широкое употребление и далеко не всегда были доступны. Лет 50 назад о вычислительной технике, размеры которой были сравнимы с большой комнатой, знали лишь специалисты-профессионалы.

А в XVI–XVIII веках математики тратили годы, а то и всю жизнь на создание все более совершенных вычислительных приборов и алгоритмов, которые позволяли им найти все более точные приближенные значения иррациональных чисел, иногда – всего лишь несколько новых десятичных знаков. А лучшие математики древности вплоть до V века до н.э. даже представлений не имели об иррациональных числах и том, что сегодня знает любой восьмиклассник: $\pi \approx 3{,}14159265358...$ – непериодическая дробь.

История поиска приближенных значений иррационального числа π, которая идет от математиков Древней Греции, Вавилона, Египта, Индии, Китая, полна легенд, драматических событий, разочарований и побед. Зачем нужны были эти усилия, если даже в простом калькуляторе можно посмотреть любое нужное для работы число знаков после запятой?

Ответ простой – для того чтобы ***создать эту возможность***. Любой калькулятор, любой язык программирования, используемый в компьютерах, не считает эти десятичные знаки сам по себе. В электронных устройствах заложены программы, использующие некоторые вычислительные алгоритмы. Так что алгоритмы эти существуют, только они стали невидимыми для обычных пользователей вычислительной техники. Однако для того, чтобы совершенствовать эту технику, алгоритмы надо знать.

Некоторые из этих алгоритмов полезны и для обычных пользователей – ведь бывают ситуации, когда калькулятора под рукой нет, а прикинуть значение корня нужно. Для этого существуют способы приближенного вычисления квадратного корня, с которыми мы и познакомимся в данном пункте.

Первый самый простой способ – это способ прикидки. Идея его создания опирается на известное нам свойство 7 корней: если $a > b$, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ и если $a < b$, то $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ (где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$).

Отсюда для тройки неотрицательных чисел выполняется: если $a < x < b$, то $\sqrt{a} < \sqrt{x} < \sqrt{b}$. Это неравенство можно использовать для оценки значения корня с помощью поиска пограничных рациональных чисел, между которыми будет располагаться искомый корень. Ясно, что для этого a и b должны быть квадратами рациональных чисел.

Воспользуемся этой идеей и найдем приближенное значение, например, $\sqrt{2}$. Мы можем подобрать два точных квадрата, между которыми располагается число 2. Выберем ближайшие к числу 2 натуральные числа – 1 и 4.

$$1 < 2 < 4 \;\Rightarrow\; \sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4} \;\Rightarrow\; 1 < \sqrt{2} < 2.$$

Значит, $\sqrt{2} = 1,\ldots$

Чтобы получить значение первой цифры после запятой, увеличим точность оценки и рассмотрим неравенство $\sqrt{a} < \sqrt{2{,}00} < \sqrt{b}$. Учтем, что для получения одного знака после запятой под корнем должно быть после запятой вдвое больше знаков. Теперь подберем два квадрата рациональных чисел с двумя знаками после запятой, наиболее близких к числу 2,00.

$$1{,}96<2{,}00<2{,}25 \;\Rightarrow\; \sqrt{1{,}96}<\sqrt{2{,}00}<\sqrt{2{,}25} \;\Rightarrow\; 1{,}4<\sqrt{2}<1{,}5.$$

Значит, $\sqrt{2}=1{,}4\ldots$

Аналогично, чтобы получить значение второй цифры после запятой, нужно подобрать два точных квадрата, наиболее близких к числу 2,0000.

$$19\,881<20\,000<20\,164 \;\Rightarrow\; \sqrt{1{,}9881}<\sqrt{2{,}0000}<\sqrt{2{,}0164} \;\Rightarrow\; 1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42.$$

Значит, $\sqrt{2}=1{,}41\ldots\approx 1{,}4$.

Для получения следующей цифры после запятой нужно подобрать два точных квадрата, наиболее близких к числу 2,000000, и т.д. Если у нас под рукой есть таблица квадратов любых чисел, то данный способ позволяет определить приблизительное значение любого корня.

Этот способ удобен, когда достаточно извлечь корень с точностью до целых или десятых. Однако для извлечения корня с более высокой точностью он становится неудобным. Познакомимся с другим, более эффективным способом приближенного вычисления квадратного корня.

Будем считать, что мы свободно можем выполнять деление натуральных чисел с любым нужным числом знаков после запятой. Тогда в извлечении квадратного корня из некоторого положительного числа x нам поможет последовательность чисел x_1; x_2; x_3 ..., где x_1 – произвольное положительное число, $x_2=\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{x}{x_1}\right)$; $x_3=\frac{1}{2}\left(x_2+\frac{x}{x_2}\right)$; $x_4=\frac{1}{2}\left(x_3+\frac{x}{x_3}\right)$ и т.д.

Как говорят, мы имеем *рекуррентно заданную* числовую последовательность: (от латинского «*recurrens*» – «возвращающийся»), когда задаются несколько первых членов последовательности и правило, позволяющее вычислять каждый следующий член через предыдущие. В нашем случае последовательность задается формулой $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{x}{x_n}\right)$, где x_1 – произвольное положительное число, близкое по значению к $\sqrt{x}$.

Можно показать, что каждое следующее число в этом ряду все ближе и ближе приближается к значению $\sqrt{x}$.

* * *

Строгое доказательство этого факта может быть получено лишь методами математического анализа, но смысл предложенного подхода можно проиллюстрировать следующим рассуждением.

Рассмотрим разницу между некоторым числом данного ряда и значением $\sqrt{x}$:

$$x_{n+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{x}{x_n}-2\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{x_n^2-2\sqrt{x}x_n+x}{x_n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x_n-\sqrt{x}\right)^2}{x_n},\text{ где } n=1,\,2,\,3\ldots$$

Поэтому $x_2-\sqrt{x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x_1-\sqrt{x}\right)^2}{x_1}$; $\quad x_3-\sqrt{x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x_2-\sqrt{x}\right)^2}{x_2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{\left(x_1-\sqrt{x}\right)^2}{2x_1}\right)^2}{x_2}=\frac{1}{8}\cdot\frac{\left(x_1-\sqrt{x}\right)^4}{x_1^2x_2}$;

$$x_4-\sqrt{x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{8}\frac{\left(x_1-\sqrt{x}\right)^4}{x_1^2x_2}\right)^2}{x_3}=\frac{1}{128}\cdot\frac{\left(x_1-\sqrt{x}\right)^8}{x_1^4x_2^2x_3}\text{ и т.д.}$$

Мы видим, что разница между $\sqrt{x}$ и каждым последующим числом этого ряда сокращается. Если, например, выбрать x_1 так, что $\left|x_1 - \sqrt{x}\right| < 0{,}1$, то есть x_1 приближает $\sqrt{x}$ с одним десятичным знаком после запятой, то x_2 уже приближает $\sqrt{x}$ не менее чем с двумя знаками, x_3 – не менее чем с четырьмя, x_4 – не менее чем с 8 знаками и т.д. (на самом деле точных знаков будет больше благодаря быстро растущему множителю в знаменателе: 2, 8, 128 и т.д.).

Рассмотрим пример использования этой последовательности чисел для приближенного вычисления квадратного корня. Найдем опять значение $\sqrt{2}$, тогда $x = 2$. Возьмем для простоты $x_1 = 1$. Тогда $x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{2}{x_1}\right) = \frac{1}{2} + 1 = 1{,}5.$

Полученное значение x_2 отличается от найденного с помощью калькулятора значения $\sqrt{2}$ меньше чем на 0,1. Верной оказалась только цифра целой части.

$x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{2}{x_2}\right) = \frac{17}{12} = 1{,}416666667\ldots$ Два знака после запятой совпали со значением, найденным с помощью калькулятора.

$x_4 = \frac{1}{2}\left(x_3 + \frac{2}{x_3}\right) = \frac{577}{408} = 1{,}414215686\ldots$ Уже пять знаков после запятой верны.

$x_5 = \frac{1}{2}\left(x_4 + \frac{2}{x_4}\right) = \frac{665857}{470832} = 1{,}414213562\ldots$ Теперь все 9 знаков верны, они совпали с вычислениями на микрокалькуляторе.

Чтобы быстрее выходить на более точное значение корня, можно подбирать x_1, которое как можно ближе к значению корня. Так в рассмотренном нами примере целые части $x_1 = 1$ и значения $\sqrt{2}$ одинаковы, они отличались друг от друга только дробной частью (приблизительно на 0,4).

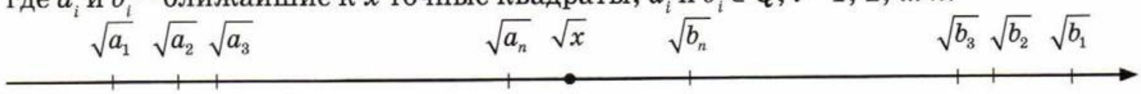
Итак, мы выявили следующие *способы приближенного вычисления значения* $\sqrt{x}$.

Способы приближенного вычисления значения $\sqrt{x}$

1. Оценка значения корня путем постепенного сужения границ a_i и b_i:

$$a_i < x < b_i \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a_i} < \sqrt{x} < \sqrt{b_i},$$

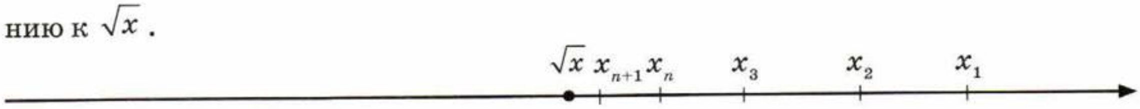
где a_i и b_i – ближайшие к x точные квадраты, a_i и $b_i \in \mathbf{Q}$, $i = 1, 2, \ldots n$.



Тогда каждая последующая цифра числа $\sqrt{x}$ определяется пошагово в процессе вычисления цифр числа $\sqrt{a_i}$.

2. Использование последовательности чисел x_n:

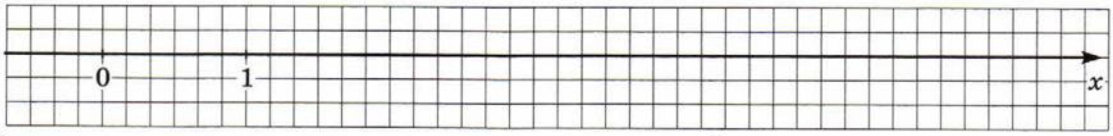
$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{x}{x_n}\right)$, где x_1 – произвольное положительное число, близкое по значению к $\sqrt{x}$.



Тогда значение $\sqrt{x} \approx x_{n+1}$

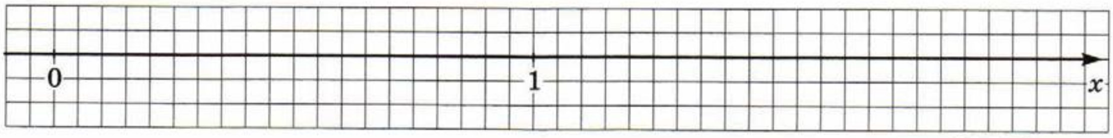
Последний способ редко используется на практике ввиду его трудоемкости. Оценить его значимость сможет тот, кто решит всерьез заняться изучением высшей математики.

231 а) Отметьте на числовой прямой числа: $\sqrt{1}$; $\sqrt{4}$; $\sqrt{9}$; $\sqrt{16}$.



Между какими соседними целыми числами будут располагаться числа: $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$? Отметьте эти иррациональные числа на числовой прямой.

б) Отметьте на числовой прямой числа: $\sqrt{1{,}21}$; $\sqrt{1{,}44}$; $\sqrt{1{,}69}$; $\sqrt{1{,}96}$; $\sqrt{2{,}25}$; $\sqrt{2{,}56}$; $\sqrt{2{,}89}$; $\sqrt{3{,}24}$; $\sqrt{3{,}61}$.



Между какими отмеченными числами будут располагаться числа: $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$? Отметьте эти иррациональные числа на числовой прямой.

в) Увеличилась ли точность определения расположения $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ на второй числовой прямой? Как отметить на числовой прямой число $\sqrt{5}$ с такой же точностью?

232 Пользуясь результатом выполнения предыдущего задания, определите:

а) целую часть числа $\sqrt{3}$;

б) цифру, стоящую в разряде десятых числа $\sqrt{3}$.

Как найти цифру, стоящую в разряде сотых числа $\sqrt{3}$?

233 Найдите приближенное значение $\sqrt{3}$ с помощью калькулятора. Сравните цифры $\sqrt{3}$, найденные в предыдущем задании, с его значением, полученным с помощью калькулятора. Сформулируйте способ приближенного вычисления квадратного корня и сопоставьте его со способом 1, описанным на стр. 60 учебника.

234 Определите без калькулятора, между какими целыми числами лежит число:

а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt{17}$; в) $\sqrt{301}$; г) $\sqrt{1000}$;

д) $\sqrt{5 \cdot 7}$; е) $\sqrt{17 \cdot 19}$; ж) $\sqrt{7 \cdot 11 \cdot 13}$; з) $\sqrt{9 \cdot 10 \cdot 11}$;

и) $\sqrt{5}+\sqrt{7}$; к) $\sqrt{7}+\sqrt{11}$; л) $\sqrt{24}+\sqrt{26}$; м) $\sqrt{1025}+\sqrt{1027}$.

235 Какое число является более точным приближением $\sqrt{11}$:

а) 3 или 4; в) 3,31 или 3,32;

б) 3,3 или 3,4; г) 3,316 или 3,317?

Ответьте на вопрос, не используя калькулятор.

236 Вычислите приближенное значение числа $\sqrt{7}$ с точностью до сотых:

1) используя способ «сужения границ»;

2) с помощью последовательности чисел $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{x}{x_n}\right)$.

Сколько членов последовательности вам пришлось вычислить, чтобы найти две верные цифры числа после запятой?

П **237** Вычислите: $\dfrac{\sqrt{6{,}25}-\sqrt{0{,}0036}-\sqrt{4{,}41}-\sqrt{0{,}0196}}{\sqrt{0{,}25}}$.

238 Каким числом можно заменить A, чтобы полученный в результате замены многочлен можно было представить в виде квадрата суммы или разности:

а) x^2-6x+A; б) x^2-8x+A; в) x^2+2x+A; г) x^2+x+A.

239 Разложите многочлен на множители, выделяя полный квадрат:

а) $x^2+2x-15$; б) a^2+4a-5; в) $x^2+x-3{,}75$.

Д **240** Определите **без** калькулятора между какими целыми числами лежит число:

а) $\sqrt{7}$; г) $\sqrt{7777}$; ж) $\sqrt{7\cdot 77}$; к) $\sqrt{17}+\sqrt{19}$;

б) $\sqrt{77}$; д) $\sqrt{20\cdot 50}$; з) $\sqrt{19\cdot 20\cdot 21\cdot 22}$; л) $\sqrt{500}+\sqrt{501}$;

в) $\sqrt{777}$; е) $\sqrt{29\cdot 31}$; и) $\sqrt{15}+\sqrt{17}$; м) $\sqrt{1000}+\sqrt{1001}$.

241 Какое число является более точным приближением $\sqrt{19}$:

а) 4 или 5; б) 4,3 или 4,4; в) 4,35 или 4,36; г) 4,358 или 4,359?

Ответьте на вопрос, не используя калькулятор.

242 Разложите многочлен на множители, выделяя полный квадрат:

а) $x^2-2x-24$; б) $a^2+12a+20$; в) $x^2+x-0{,}75$.

С **243*** На доске выписаны числа $\sqrt{2}$ и $\sqrt{5}$. Разрешается дописать на доске сумму, разность или произведение любых двух различных чисел, уже выписанных на доске. Докажите, что можно написать на доске число 1.

Экспресс-тест № 4

Примерное время выполнения – 45 минут

Часть А

№ 1

№ 1. Через какую точку проходит график функции $y=x^3$?

А) $F(2;\ 6)$; Б) $N(-1;\ -3)$; В) $S(-2;\ -8)$; Г) $D(-2;\ 8)$.

№ 2

№ 2. Функция задана формулой $f(x)=x^2$. Какое из высказываний верно?

А) $f(-3{,}5)<f(-3{,}2)$; Б) $f(-5)<f(5)$; В) $f(1{,}7)>f(1{,}9)$; Г) $f(-1)>f(0{,}2)$.

№ 3

№ 3. Какому числовому промежутку принадлежит значение произведения $\sqrt{\dfrac{1}{13}}\cdot\sqrt{\dfrac{13}{17}}\cdot\sqrt{\dfrac{17}{49}}$?

А) $\left(-1;\ \dfrac{1}{3}\right)$; Б) $\left(-1;\ \dfrac{1}{13}\right]$; В) $\left[\dfrac{1}{3};1\right]$; Г) $\left(0;\ \dfrac{1}{17}\right]$.

№ 4

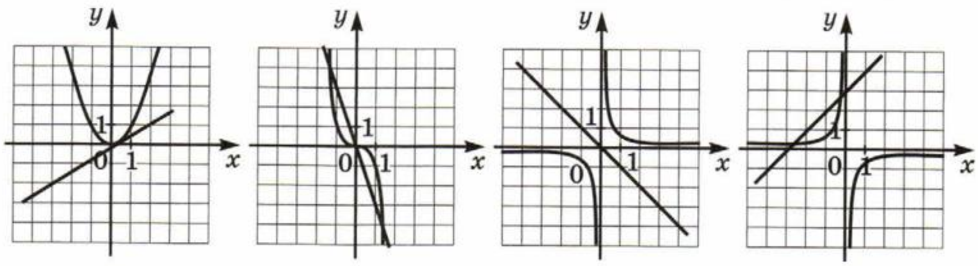
№ 4. Решите уравнение, применяя определение арифметического квадратного корня: $\sqrt{4x+1}=3$.

А) 0,5; Б) $\varnothing$; В) 2,5; Г) 2.

№ 5			
1	2	3	4

№ 5. Установите соответствие между системой уравнений и графической иллюстрацией его решения:

1) $\begin{cases} y=\dfrac{0,5}{x}; \\ y=-x \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y=-\dfrac{0,5}{x}; \\ y=x+3 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y=-x^3; \\ y=-3x \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y=x^2 \\ y=x-\dfrac{1}{4}. \end{cases}$



А) Б) В) Г)

Часть В

№ 6

№ 6. Постройте график функции $y=\begin{cases} \sqrt{x}, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant 4; \\ |x|, \text{ если } -1 \leqslant x < 0; \\ x^2, \text{ если } -2 \leqslant x < -1 \end{cases}$

и установите, сколько у него общих точек с графиком, заданным формулой $y = 0,4x + 0,4$.

А) 0; Б) 1; В) 2; Г) 3.

№ 7

№ 7. Упростите выражение $\left(5\sqrt{6}+3\sqrt{3}\right)^2-\left(5\sqrt{6}+3\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{3}-5\sqrt{6}\right)$.

А) 54; Б) $300+90\sqrt{2}$; В) $54+30\sqrt{18}$; Г) 300.

Часть С

(ход решения и ответ записывается на отдельном листе)

№ 8. Упростите выражение: $\sqrt{20}-\sqrt{21-4\sqrt{5}}$.

Ответы и решения к тесту:

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5				№ 6	№ 7
В	*Г*	*А*	*Г*	*1*	*2*	*3*	*4*	*Г*	*Б*
				В	*Г*	*Б*	*А*		

№ 8

$$\sqrt{20}-\sqrt{21-4\sqrt{5}}=\sqrt{20}-\sqrt{1-2\cdot1\cdot2\sqrt{5}+20}=\sqrt{20}-\sqrt{1-2\cdot1\cdot2\sqrt{5}+\left(2\sqrt{5}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{20}-\sqrt{\left(1-2\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{20}-\left|1-2\sqrt{5}\right|=2\sqrt{5}-\left(2\sqrt{5}-1\right)=1$$

Так как: $1-2\sqrt{5}<0$, $\left|1-2\sqrt{5}\right|=2\sqrt{5}-1$.

Шкала успешности:

9–10 баллов – *отлично*
7–8 баллов – *хорошо*
5–6 баллов – *удовлетворительно*

Задачи для самоконтроля к Главе 3

244 Постройте график функции: А) $y = x^4$; Б) $y = x^5$.

1) Сравните: а) $f(-9)$ и $f(-3{,}2)$; б) $f(-2)$ и $f(1)$; в) $f(-100)$ и $f(100)$.

2) Определите, какое минимальное и максимальное значение функции на отрезках: а) $[-2; 2]$; б) $[-1; 0]$; в) $[0; 1]$?

3) Укажите, на каких промежутках из области определения функция положительна, отрицательна, равна нулю.

245 На рисунке 1 построена часть графика функции $y = f(x)$ с областью определения: $[-5; 5]$. Дополните график, если известно, что $y = f(x)$ –четная функция.

1) Найдите $f(-3)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$.

2) Выделите красным цветом часть кривой, на которой функция возрастает. Укажите, при каких значениях x функция возрастает.

3) Выделите зеленым цветом часть кривой, на которой функция постоянна. Укажите, при каких значениях x функция постоянна.

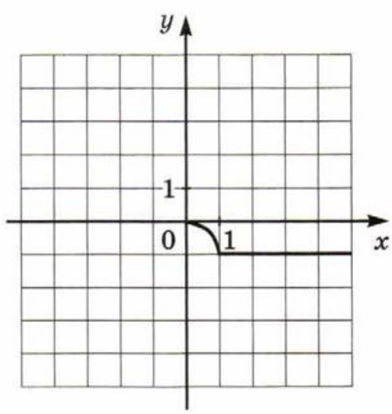


Рис. 1

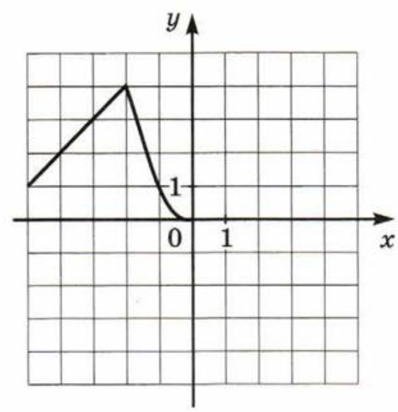


Рис. 2

246 На рисунке 2 построена часть графика функции $y = f(x)$ с областью определения $[-5; 5]$. Дополните график, если известно, что $y = f(x)$ – нечетная функция.

1) Найдите $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$.

2) Выделите красным цветом часть кривой, на которой функция убывает. Укажите, при каких значениях x функция убывает.

3) Выделите синим цветом часть кривой, на которой функция возрастает. Укажите, при каких значениях x функция возрастает.

247 Постройте график функции с заданной областью определения. «Прочитайте» график по известному плану:

а) $y = x^{10}$, $x \in (-\infty; 1]$;

б) $y = x^2$, $x \in (-3; 3)$;

в) $y = x^7$, $x \in [-1; 1]$;

г) $y = x^3$, $x \in [-2; +\infty)$.

248 Решите графически уравнение:

а) $x^5 = -1$; б) $x^{10} = -x - 7$; в) $x^7 = |x|$.

249 Обратная пропорциональность задана формулой $y=-\dfrac{18}{x}$.

Найдите значение функции, соответствующее значению аргумента, равному: $-0{,}06$; $-1{,}2$; $0{,}9$; 50; 300; -5400.

Определите, принадлежит ли графику функции точка:

$A(-3;\ 6)$; $B(-0{,}5;\ -36)$; $C\left(\dfrac{6}{7};-21\right)$; $D\left(-3\dfrac{3}{5};\dfrac{1}{5}\right)$; $F(0{,}03;\ -600)$.

250 Задайте формулой обратную пропорциональность, если известно, что график функции проходит через точку:

а) $D(-5;\ -0{,}8)$; б) $H(3;\ -19)$; в) $K\left(\dfrac{12}{13};26\right)$; г) $Q(-4;\ 14)$; д) $R\left(\dfrac{5}{14};-3\dfrac{1}{2}\right)$.

251 С помощью графика функции $y=\dfrac{6}{x}$ найдите три значения аргумента, при которых значения функции:

а) больше 1;

б) больше 0;

в) меньше -3;

г) меньше 0.

252 Дана функция $f(x)=\dfrac{0{,}9}{x}$. Найдите:

а) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$; б) $f(-0{,}03)$; в) $f(0{,}5)$; г) $f\left(-\dfrac{3}{5}\right)$; д) $10\cdot f(-0{,}001)$; е) $f(m)$.

253 Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y=\dfrac{3}{x} \\ x+y=4 \end{cases}$; б) $\begin{cases} y=-\dfrac{7}{x} \\ 7x+y=0 \end{cases}$; в) $\begin{cases} y=\dfrac{8}{x} \\ 3x+y=-10 \end{cases}$.

254 Определите количество решений системы уравнений:

а) $\begin{cases} y=\dfrac{0{,}5}{x} \\ y=x^8 \end{cases}$; б) $\begin{cases} y=-\dfrac{6}{x} \\ y=x^9 \end{cases}$; в) $\begin{cases} y=x^6 \\ y=x^{11} \end{cases}$.

255 Докажите, что функция $y=f(x)$, заданная формулой $y=2x^4-0{,}2x^2$, является четной.

256 Докажите, что функция $y=f(x)$, заданная формулой $y=-\dfrac{3}{x}+x$, является нечетной.

257 Дана функция $y=\begin{cases} x^4, \text{ если } x\geqslant -1; \\ -\dfrac{4}{x}, \text{ если } -4<x<-1 \end{cases}$

Найдите $y(-4)$, $y(-2)$, $y(-1)$, $y\left(-\dfrac{1}{2}\right)$, $y(0)$, $y(2)$.

Постройте график функции и «прочитайте» его.

258 Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{400}$; в) $\left(\sqrt{8}\right)^2$; д) $\sqrt{121}\cdot\sqrt{36}$; ж) $\sqrt{0{,}25}-\sqrt{0{,}09}$; и) $\sqrt{91+\sqrt{81}}$;

б) $\sqrt{0{,}49}$; г) $\left(5\sqrt{5}\right)^2$; е) $\sqrt{0{,}64}:\sqrt{0{,}0004}$; з) $0{,}3\sqrt{44\dfrac{4}{9}}+2{,}6:\sqrt{6\dfrac{19}{25}}$; к) $16\cdot\sqrt{14\dfrac{1}{16}}$.

259 Упростите:

а) $\sqrt{324\cdot 25}$; б) $\sqrt{147}\cdot\sqrt{75}$; в) $\sqrt{\dfrac{289}{900}}$; г) $\dfrac{\sqrt{405}}{\sqrt{5}}$; д) $15\cdot\sqrt{(-7)^2}$; е) $1{,}2\cdot\sqrt{2^6}$.

Задачи для самоконтроля к Главе 3

260 Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{200}$; б) $\sqrt{450}$; в) $\sqrt{\frac{128}{147}}$; г) $\sqrt{100m}$; д) $\sqrt{4d^{10}k^{11}}$, $d \neq 0$; е) $\sqrt{\frac{z^9}{n^8}}$.

261 Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{x^2-14x+49}$, если $x<7$; б) $\sqrt{5x^2-4x+0{,}8}$ если $x<0{,}4$.

262 Внесите множитель под знак корня:

а) $2\sqrt{2}$; б) $-3\sqrt{3}$; в) $13m\sqrt{m}$; г) $2d^3\sqrt{4d}$.

263 Упростите:

а) $(\sqrt{6}-\sqrt{108})\cdot\sqrt{6}$; б) $5\sqrt{3}-3\sqrt{27}+\sqrt{48}$; в) $m\sqrt{9m^2}, m<0$; г) $\sqrt{7+\sqrt{13}}\cdot\sqrt{7-\sqrt{13}}$.

264 Решите уравнение, используя определение арифметического квадратного корня:

а) $\sqrt{x}=7$; г) $3\sqrt{x}=3$; ж) $\sqrt{x-1}=3$;

б) $\sqrt{x}=25$; д) $\sqrt{x}=-1$; з) $\sqrt{x-1}=-3$;

в) $3\sqrt{x}=105$; е) $\sqrt{x}=0$; и) $\sqrt{x+8}=\sqrt{18}$.

265 Выполните действия, используя формулы сокращенного умножения:

а) $\left(1+\sqrt{m}\right)\left(1-\sqrt{m}\right)$; в) $\left(2+2\sqrt{q}\right)^2$; д) $\left(5\sqrt{b}+0{,}4\right)^2$;

б) $\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)\left(\sqrt{d}-\sqrt{c}\right)$; г) $\left(\sqrt{k}-\sqrt{z}\right)^2$; е) $\left(2-\sqrt{s}\right)\left(4+2\sqrt{s}+s\right)$.

266 Докажите, что значение выражения есть число рациональное:

а) $\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)$; в) $\frac{3}{3-\sqrt{3}}+\frac{3}{3+\sqrt{3}}$;

б) $\left(10+3\sqrt{5}\right)\left(3\sqrt{5}-10\right)$; г) $\frac{0{,}5}{4\sqrt{6}+6}-\frac{0{,}5}{4\sqrt{6}-6}$.

267 Докажите, что значение выражения есть число иррациональное:

а) $\left(1+\sqrt{10}\right)^2$; в) $\frac{5}{4-\sqrt{7}}+\frac{6}{\sqrt{7}-4}$;

б) $\left(3\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2$; г) $\frac{2}{\sqrt{8}-\sqrt{7}}-\frac{2}{\sqrt{8}+\sqrt{7}}$.

268 Разложите на множители:

а) $11+m\sqrt{11}$; в) x^2-13; д) $c+2\sqrt{cs}+s$, $c, s \geqslant 0$;

б) $m\sqrt{6}-\sqrt{3m}$; г) $x-5$, $x \geqslant 0$; е) $a-28\sqrt{ab}+196b$, $a, b \geqslant 0$.

269 Упростите выражение:

а) $\sqrt{27}-\sqrt{3}$; в) $7\sqrt{n}+3\sqrt{v}-8\sqrt{n}+8\sqrt{v}$;

б) $4\sqrt{8}+\sqrt{72}$; г) $\sqrt{98}-\sqrt{75}-\sqrt{32}+\sqrt{243}$.

270 Упростите выражение:

а) $\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}+\sqrt{2}$; в) $\sqrt{\left(3-\sqrt{12}\right)^2+\left(\sqrt{12}-3\right)^2}$;

б) $\sqrt{\left(5-\sqrt{11}\right)^2}+\sqrt{\left(2+\sqrt{11}\right)^2}$; г) $\left(3\sqrt{15}+2\sqrt{3}\right)^2-\left(3\sqrt{15}-2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{15}+2\sqrt{3}\right)$.

271 Упростите:

а) $\sqrt{10+4\sqrt{6}}$; б) $\sqrt{11-2\sqrt{10}}$; в) $\sqrt{51-12\sqrt{15}}$.

272 Избавьтесь от иррациональности в знаменателе:

а) $\dfrac{17}{\sqrt{2}}$; в) $\dfrac{4}{5+\sqrt{5}}$; д) $\dfrac{48}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}$; ж) $\dfrac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{2}-\sqrt{12}}$;

б) $\dfrac{5}{7\sqrt{13}}$; г) $\dfrac{9}{6-2\sqrt{6}}$; е) $\dfrac{2}{\sqrt{11}-\sqrt{13}}$; з) $\dfrac{3}{\sqrt{7}-\sqrt{3}+1}$.

273 Выпишите числа в порядке убывания:

$5\sqrt{5},\ 3\sqrt{7},\ 7\sqrt{3},\ 12,\ \sqrt{65},\ 2\sqrt{15},\ 9\sqrt{2}.$

274 Постройте график функции $y=\sqrt{x}$. Пользуясь графиком, найдите приближенные значения корней и выполните сравнение:

а) $\sqrt{2}$ и 1,2; б) $\sqrt{3}$ и 1,4; в) $\sqrt{5}$ и 2,5. г) $\sqrt{6}$ и 3.

275 Определите без калькулятора между какими целыми числами лежит число:

а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{10}$; в) $\sqrt{300}$; г) $\sqrt{500}$;

276 Решите графически уравнение:

а) $\sqrt{x}=x$; б) $\sqrt{x}=x^2$; в) $x^2=-x+2$;

г) $-\dfrac{5}{x}=0$; д) $\dfrac{4}{x}=\dfrac{x}{4}$.

277 Постройте график функции

а) $y=\begin{cases}4x, \text{ если } x\geqslant 2;\\ x^3, \text{ если } 1\leqslant x<2;\\ x^2, \text{ если } x<1\end{cases}$ б) $y=\begin{cases}\dfrac{8}{x}, \text{ если } 4<x\leqslant 8;\\ \sqrt{x}, \text{ если } 0<x\leqslant 4;\\ x^2, \text{ если } -2<x\leqslant 0;\\ -2x, \text{ если } -4\leqslant x<-2\end{cases}$

278 Дана функция:

$$y=\begin{cases}\dfrac{2}{x}, \text{ если } 2<x\leqslant 4;\\ \dfrac{x}{2}, \text{ если } 0<x\leqslant 2;\\ x^4, \text{ если } -1<x\leqslant 0;\\ -\dfrac{1}{x}, \text{ если } -4\leqslant x\leqslant -1\end{cases}$$

а) найдите $y(-4)$, $y(-1)$, $y(0)$, $y(1)$, $y(1{,}4)$, $y(2)$, $y(4)$;

б) постройте график кусочно-заданной функции;

в) найдите наибольшее и наименьшее значения функции.

Глава 4
Квадратичная функция

§ 1. Квадратные уравнения

1. Квадратные уравнения в реальных процессах. Неполные квадратные уравнения и их решение

Для того чтобы усовершенствовать ум, надо больше размышлять, чем заучивать.

Рене Декарт (1596–1650),
французский математик, философ, физик

Мы уже знаем, что исследование новых видов уравнений, описывающих различные классы задач, расширяет возможности по их решению. В данном пункте мы познакомимся с новыми для нас *квадратными уравнениями*, имеющими важное значение в силу их широкого практического применения. Поиск способов их решения, вызванный потребностями земледелия, военного дела, астрономии, уходит в глубокую древность – более 2000 лет до н.э. А современная теория их решения оформилась сравнительно недавно – лишь в XVII веке, и связана с именами Декарта, Ньютона и других ученых.

Рассмотрим вначале несколько практических задач.

Задача 1

Садовый участок имеет форму прямоугольника. Длина участка на 9,5 м больше его ширины, а его площадь составляет 2,1 сотки. Сколько метров сетки нужно приобрести для ограждения этого участка, если на калитку планируется отвести 1 м?

Решение:

Сначала установим соответствие единиц измерения величин: 2,1 сотки = 210 м^2.

Пусть ширина участка составляет x м, тогда его длина равна $(x + 9{,}5)$ м, где $x > 0$. Значит, площадь участка равна $x\,(x + 9{,}5)$ м^2, что по условию задачи составляет 210 м^2. Получим уравнение:

$$x\,(x + 9{,}5) = 210.$$

Раскроем скобки и перенесем все ненулевые члены уравнения влево:

$$x^2 + 9{,}5x - 210 = 0.$$

Решив это уравнение, нетрудно ответить на вопрос задачи.

* * *

Задача 2

На прямой линии, проходящей через центр Земли и Луны, найти точку, в которой сила притяжения к Земле равна силе притяжения к Луне (то есть найти расстояние от искомой точки до центров Земли и Луны). Известно, что расстояние между центрами Земли и Луны равно $3{,}84 \cdot 10^5$ км, а масса Земли в 81 раз больше массы Луны.

Решение:

Для краткости оформления обозначим расстояние между центрами Земли и Луны d км, массу Луны M т, а массу Земли, соответственно, $81M$ т. Пусть расстояние от искомой точки до центра Земли равно x км ($x > 0$), тогда расстояние до центра Луны составит $(d - x)$ км.

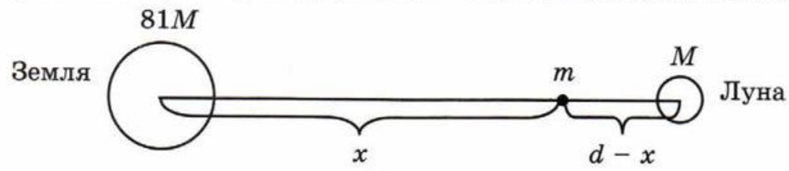


Рис. 1

Если в искомую точку поместить массу m т (рис. 1), то по закону всемирного тяготения, с которым вы скоро познакомитесь на уроках физики, $\gamma\frac{81Mm}{x^2} = \gamma\frac{Mm}{(d-x)^2}$, где γ – гравитационная постоянная. Отсюда $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{81(d-x)^2}$. Так как $x = 0$ и $x = d$ заведомо не являются решениями задачи, можем записать:

$$x^2 = 81(d-x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 81(d-x)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 81(d^2 - 2dx + x^2) = 0 \Leftrightarrow 80x^2 - 162dx + 81d^2 = 0.$$

Мы помним, что d – известная величина, равная $384 \cdot 10^3$ км. Значит, для ответа на вопрос задачи нам надо решить уравнение:

$$80x^2 - 162 \cdot (384 \cdot 10^3)\,x + 81 \cdot (384 \cdot 10^3)^2 = 0.$$

Мы получили уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c – некоторые числа. Если $a \neq 0$, то данное уравнение не сводится к линейному, и мы приходим к новому для нас типу уравнений – *квадратному уравнению*.

Определение. **Квадратным уравнением с неизвестным x** называется уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c – некоторые числа, $a \neq 0$.

В первой задаче мы получили квадратное уравнение с коэффициентами $a = 1$; $b = 9{,}5$; $c = -210$; во второй $a = 80$; $b = 162 \cdot (384 \cdot 10^3)$; $c = 81 \cdot (384 \cdot 10^3)^2$. В обоих случаях все коэффициенты a, b и c были отличны от нуля. Такое уравнение называют **полным** квадратным уравнением. Но так бывает далеко не всегда. Рассмотрим ситуации, когда это не так.

Ясно, что при $a = 0$ уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$ не является квадратным, оно сведется к хорошо известному нам линейному уравнению.

Если же b или c (одновременно либо по отдельности) будут равны нулю, то уравнение останется квадратным, но мы получим так называемое **неполное** квадратное уравнение. Разберемся с решением таких уравнений.

Если коэффициент при x равен нулю, то неполное квадратное уравнение имеет вид $ax^2 + c = 0$, $a \neq 0$. Это уравнение приводится к виду $x^2 = -\frac{c}{a}$. Если числа a и c одного знака, то выражение $-\frac{c}{a}$ отрицательно, и уравнение не имеет решений. Если же числа a и c разных знаков, то выражение $-\frac{c}{a}$ положительно, и уравнение имеет два решения: $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ и $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$. Эти два решения обычно записывают в виде $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$. Если $c = 0$, то выражение $-\frac{c}{a}$ равно нулю, и уравнение имеет единственное решение: $x = 0$.

Если коэффициент c (или, как его еще называют, *свободный, или младший член*) равен нулю, то неполное квадратное уравнение имеет вид $ax^2 + bx = 0$, $a \neq 0$. Левая часть уравнения раскладывается на множители: $x\,(ax + b) = 0$. Произведение равно нулю, когда хотя бы один из его множителей равен нулю. Поэтому уравнение распадается на два линейных уравнения: $x = 0$ и $ax + b = 0$, и оно имеет два решения: $x_1 = 0$ и $x_2 = -\frac{b}{a}$. Эти два решения совпадают, если $b = 0$, то есть если исходное уравнение имеет вид $ax^2 = 0$.

Итак, оказывается, имеющихся у нас знаний хватает, чтобы решать неполные квадратные уравнения.

Обобщим полученные случаи решения неполных квадратных уравнений в таблице.

Коэффициенты			Неполное квадратное уравнение	Решение
$a \neq 0$	$b \neq 0$	$c = 0$	$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0$	$x_1 = 0$ и $x_2 = -\frac{b}{a}$
$a \neq 0$	$b = 0$	$c \neq 0$	$ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$	1) Если числа a и c одного знака, то $\varnothing$. 2) Если числа a и c разных знаков, то $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$
		$c = 0$	$ax^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0$	$x = 0$

Пример.

Решить уравнения:

а) $3x^2 = 0$; б) $4x^2 - 16 = 0$; в) $-5x^2 + 6 = 0$; г) $7x^2 + 1 = 0$; д) $6x^2 + 2x = 0$.

Решение:

а) $3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Ответ: $\{0\}$.

б) $4x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ или $x = -2$.

Ответ: $\{-2; 2\}$.

в) $-5x^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow 5x^2 = 6 \Leftrightarrow x^2 = 1,2 \Leftrightarrow x = \sqrt{1,2}$ или $x = -\sqrt{1,2}$.

Ответ: $\{-\sqrt{1,2}\,;\ \sqrt{1,2}\}$.

г) $7x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 7x^2 = -1 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{1}{7}$.

Ответ: $\varnothing$.

д) $6x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow 2x\,(3x + 1) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0$ или $3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ или $x = -\frac{1}{3}$.

Ответ: $\{0; -\frac{1}{3}\}$.

Итак, с решением неполных квадратных уравнений мы разобрались. Попробуем теперь решить полные квадратные уравнения, полученные нами ранее при решении задач.

Естественно попытаться свести их решение к известным нам способам действий. Так, в левой части уравнения $x^2 + 9,5x - 210 = 0$ можно выделить полный квадрат, и тогда решение данного уравнения сведется к рассмотренным выше случаям неполных квадратных уравнений:

$$x^2 + 9,5x - 210 = x^2 + 2 \cdot 4,75x + 4,75^2 - 4,75^2 - 210 =$$
$$= (x^2 + 2 \cdot 4,75x + 22,5625) - 232,5625 = (x + 4,75)^2 - 15,25^2.$$

Следовательно,

$$x^2 + 9{,}5x - 210 = 0 \Leftrightarrow (x + 4{,}75)^2 - 15{,}25^2 = 0 \Leftrightarrow (x + 4{,}75)^2 = 15{,}25^2.$$

Квадраты чисел равны, если числа равны или противоположны, значит:

$$(x + 4{,}75)^2 = 15{,}25^2 \Leftrightarrow x + 4{,}75 = 15{,}25 \text{ или } x + 4{,}75 = -15{,}25 \Leftrightarrow x = -20 \text{ или } x = 10{,}5.$$

Эти же корни мы могли получить и другим известным нам способом, например, раскладывая трехчлен на множители методом группировки. В любом случае, первый корень не удовлетворяет условию задачи, поэтому ширина участка равна 10,5 м. Значит, его длина равна $10{,}5 + 9{,}5 = 20$ м, а периметр $2\,(10{,}5 + 20) = 61$ м.

По условию на калитку выделен 1 м, значит, длина сетки составит $61 - 1 = 60$ м.

Ответ: нужно приобрести 60 м сетки.

* * *

Для решения уравнения $80x^2 - 162\,(384 \cdot 10^3)\,x + 81\,(384 \cdot 10^3)^2 = 0$ вернемся к предыдущему его виду $x^2 = 81\,(d - x)^2$. Мы видим, что и в данном случае обе части уравнения представляются в виде полного квадрата, что позволяет нам, как и в предыдущем случае, упростить поиск его корней:

$$x^2 = 81\,(d - x)^2 \Leftrightarrow x^2 = [9\,(d - x)]^2 \Leftrightarrow x = 9d - 9x \text{ или } x = -9d + 9x \Leftrightarrow x = \frac{9}{10}d \text{ или } x = \frac{9}{8}d.$$

Таким образом, уравнение имеет два решения: $x_1 = \frac{9}{10}d$ и $x_2 = \frac{9}{8}d$, то есть $x_1 = 354{,}6 \cdot 10^3$ км, $x_2 = 432 \cdot 10^3$ км.

Возникает вопрос, откуда взялось второе решение – ведь из рис. 1 вроде бы ясно, что $x < d$? Оказывается, второе решение соответствует другой картинке (рис. 2).

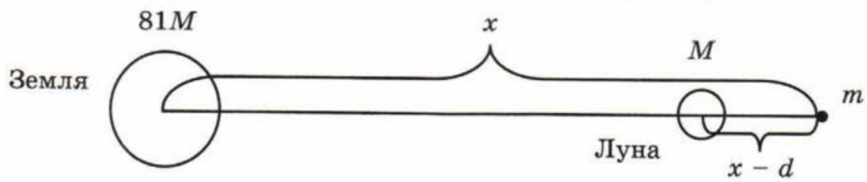


Рис. 2

Ситуацию, изображенную на рис. 2, мы сразу не предвидели, но «умные» формулы решили все за нас (так, кстати, бывает довольно часто). Дело в том, что точка равного притяжения может находиться как *на отрезке*, соединяющем центры Земли и Луны, так и *вне отрезка*, на расстоянии $x = 432 \cdot 10^3$ км от центра Земли и на расстоянии $x - d = 48 \cdot 10^3$ км от центра Луны (то есть «по ту сторону Луны»). При этом $(x - d)^2 = (d - x)^2$, и эта точка является таким же полноправным решением уравнения $x^2 = 81\,(d - x)^2$, как и первая.

Найдем расстояние до Луны для двух установленных случаев, оно вычисляется по формулам: $d - x_1 = 38{,}4 \cdot 10^3$ км и $x_2 - d = 48 \cdot 10^3$ км.

Заметим, что в первом случае силы притяжения к Земле и Луне одинаковы и направлены в противоположные стороны. Поэтому, если бы на тело в искомой точке не действовали бы никакие «третьи» силы, то оно «зависло» бы между Землей и Луной. Во втором случае силы притяжения Земли и Луны направлены в одну сторону, и поэтому такого «зависания» возникнуть не могло бы.

Ответ: расстояние от искомой точки до центров Земли и Луны равно, соответственно, $345{,}6 \cdot 10^3$ км и $38{,}4 \cdot 10^3$ км, или $432 \cdot 10^3$ км и $48 \cdot 10^3$ км.

Как видим, уже сегодня мы можем решить, вообще говоря, любое квадратное уравнение. Но пока наше решение полных квадратных уравнений достаточно трудоемкое – например, бывает не так просто выделить из трехчлена полный квадрат, да и с удобными коэффициентами «везет» далеко не всегда. Поэтому мы, вслед за математиками XVII века, займемся в последующем поиском более надежных и быстрых способов решения полных квадратных уравнений.

279 Расположите значения выражений в порядке возрастания:

Е	$(-1)^2$	**Н**	$(\sqrt{2})^2$	**И**	$\sqrt{5}$
У	-2^2	**Р**	-1^2	**Е**	$\sqrt{(-3)^2}$
А	$-\left(\frac{1}{10}\right)^2$	**Н**	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	**В**	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$

1) Сформулируйте определение получившегося понятия. Приведите примеры.

2) Сформулируйте определение корня уравнения. Выясните, какие числа из множества $A = \{-6; -\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}; 6; 8\}$ являются корнями уравнений:

а) $x(x - 6) = 0$; б) $x(x - 8) = 0$; в) $x^2 = 0$; г) $x^2 = 36$; д) $x^2 = 2$.

280 Представьте многочлен в виде произведения:

а) $16x - 4$; б) $5x^2 + x$; в) $2x^2 - 14x$.

Какой способ вы применили?

281 Даны уравнения:

а) $x^2 + 2x + 7 = 0$, $3x + 1 = 0$, $4 + 5x = 0$;

б) $-x - 3 = 0$, $-x^2 - x - 1 = 0$, $2 - x = 0$;

в) $0{,}7x - 14 = 0$, $1{,}2x + 60 = 0$, $0{,}2x^2 - 0{,}1x + 32 = 0$.

1) Определите, какое уравнение в каждом столбике является «лишним».

2) Запишите эти уравнения в общем виде. Как бы вы предложили назвать уравнения данного вида? Почему? Дайте определение уравнений указанного вида.

3) Сравните свое определение с определением на стр. 69 учебника.

282 Назовите коэффициенты квадратных уравнений:

а) $10x^2 + x - 0{,}2 = 0$; б) $2x^2 + 14x = 0$; в) $0{,}2x^2 - 1 = 0$; г) $x^2 = 0$.

Что общего у всех этих квадратных уравнений? Чем отличаются три последних уравнения от первого? Как бы вы предложили назвать уравнения данного вида? Сопоставьте свой вариант с общепринятым названием, указанным на стр. 69 учебника.

283 1) Назовите коэффициенты неполных квадратных уравнений:

а) $-2x^2 = 0$; б) $x^2 - 25 = 0$; в) $x^2 - 3 = 0$; г) $12x^2 + 48 = 0$; д) $-10 - 0{,}1x^2 = 0$.

Какое свойство является общим для всех уравнений? Какое уравнение отличается от всех остальных?

2) Предложите свой способ решения этих неполных квадратных уравнений. Сравните его со способом, предложенным на стр. 70 учебника.

284 Назовите коэффициенты неполных квадратных уравнений:

а) $2x^2 - 14x = 0$; б) $-0{,}5x^2 + x = 0$.

Какое свойство является общим для всех уравнений?

2) Как нужно преобразовать левую часть уравнения, чтобы можно было применить известный способ решения?

3) Предложите свой способ решения этих неполных квадратных уравнений. Сравните его со способом, предложенным на стр. 70 учебника.

285 Решите уравнения:

а) $4x^2 = 0$; б) $4x^2 + 4 = 0$; в) $4x^2 - 4 = 0$.

286 Решите уравнения:

а) $4x^2 + x = 0$; б) $x^2 + 4x = 0$; в) $x^2 - 9x = 0$.

287 Решите уравнения, используя подходящую замену неизвестного:

а) $x^4 - 3x^2 = 0$; б) $5x^4 + 3x^2 = 0$; в) $3x^2 - |x| = 0$; г) $2x^2 + 8|x| = 0$.

288 Решите уравнения:

а) $(-4x)^2 = 0$; в) $(3x + 3)^2 = 36$; д) $(1 - x)^2 = 2$; ж) $(1-5x)^2 = -49$;

б) $(x - 4)^2 = 0$; г) $2(x - 7)^2 = 32$; е) $(2x + 4)^2 = 8$; з) $-4(1 - x)^2 = 3$.

На какие группы можно разбить эти уравнения?

П **289** Вынесите за скобки множитель a:

а) $2ax^2 + 3ax + 4a$; б) $ax^2 + ax + a$; в) $ax^2 + ax + 1$; г) $ax^2 + bx + c$.

Д **290** Решите уравнения:

а) $5x^2 = 0$; б) $5x^2 + 45 = 0$; в) $5x^2 - 45 = 0$.

291 Решите уравнения:

а) $5x^2 + x = 0$; б) $x^2 + 5x = 0$; в) $x^2 - 25x = 0$.

292 Решите уравнения, используя подходящую замену неизвестного:

а) $x^4 - 2x^2 = 0$; б) $2x^4 + 3x^2 = 0$; в) $x^2 - |x| = 0$; г) $3x^2 + 12|x| = 0$.

293 Решите уравнения:

а) $(3x)^2 = 81$; б) $(2x + 3)^2 = 25$; в) $(1 - x)^2 = 11$; г) $(1 - 5x)^2 = -9$.

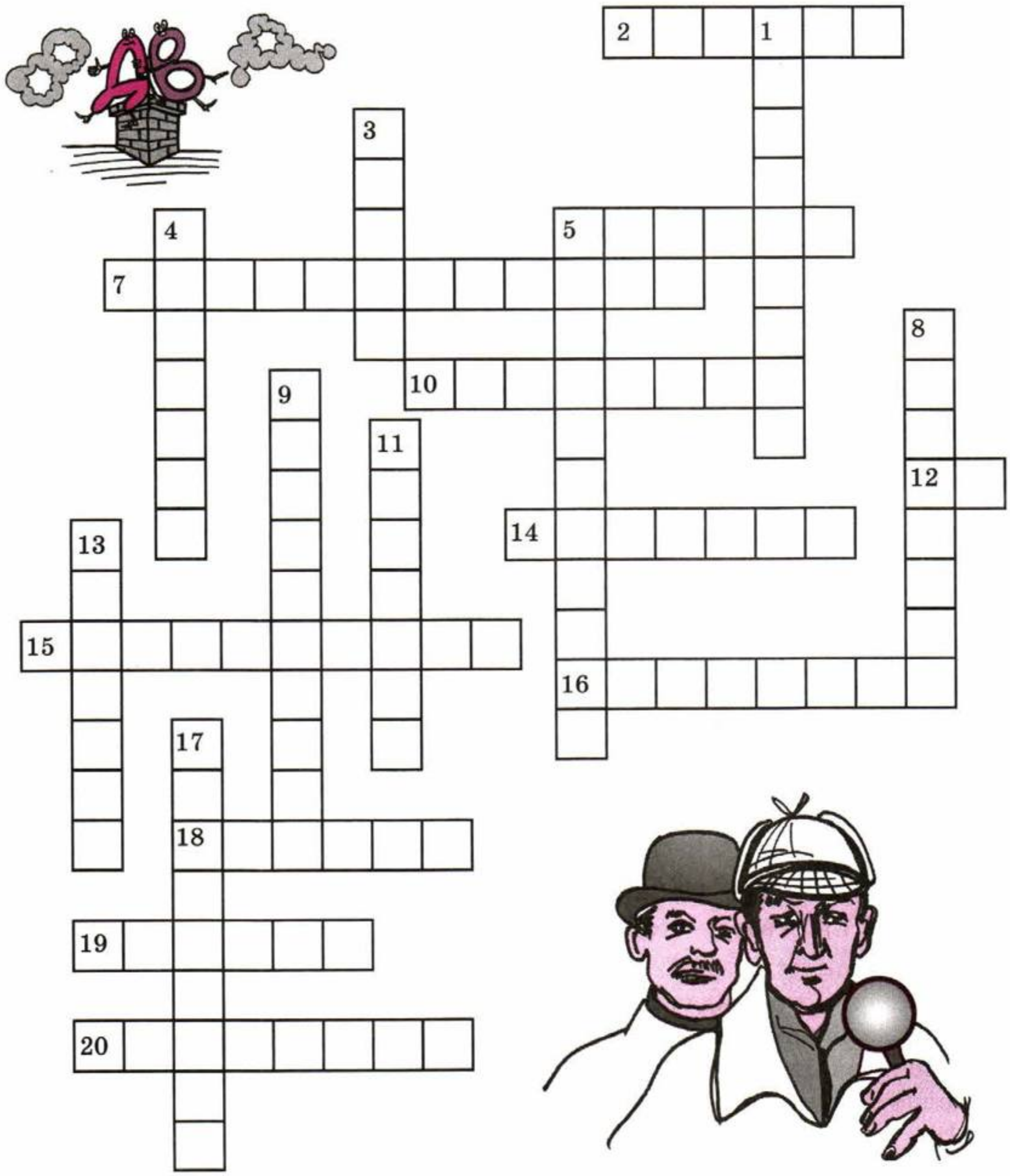
294 Разгадайте кроссворд:

По горизонтали:

2. Расстояние от начала отсчета до точки, обозначающей данное число. 5. Двенадцать. 7. Название условия B, если высказывание $A \Rightarrow B$ истинно. 10. Утверждение: «Элемент m принадлежит множеству M в том и только в том случае, когда для m выполняется условие B, то есть $m \in M \Leftrightarrow B$». 12. 100 м^2. 14. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. 15. Высказывание «$A$ или B», которое истинно, когда хотя бы одно из высказываний A и B истинно, и ложно, когда A и B одновременно ложны. 16. Название одной из координат точки на координатной плоскости. 18. График уравнения $ax + by = c$. 19. Это есть у дерева и у уравнения. 20. Утверждение: «Для каждого элемента m из множества M выполняется утверждение B, то есть: $m \in M \Rightarrow B$».

По вертикали:

1. Равенство, верное при некоторых значениях букв. 3. 10^{100}. 4. Это есть у горы и параболы. 5. Название условия A, если высказывание «$A \Rightarrow B$» истинно. 8. Название графика функции $y = x^2$. 9. Высказывание «A и B», которое истинно, когда A и B одновременно истинны, и ложно, когда хотя бы одно из высказываний A и B ложно. 11. Правило f, по которому каждому элементу x из некоторого множества X ставится в соответствие единственный элемент y из множества Y. 13. Наименьшее натуральное число. 17. Название графика обратной пропорциональности.



С **295*** Один из корней уравнения $x^2 + ax + b = 0$ равен $1+\sqrt{3}$. Найдите a и b, если известно, что они рациональны.

2. Формулы корней квадратного уравнения

Я вполне сознаю, что могу увлечься ложным, обманчивым, пойти по пути, который заведет меня в дебри; но я не могу не идти по нему... И это искание, это стремление – есть основа всякой научной деятельности.

В. И. Вернадский (1863–1945),
мыслитель, естествоиспытатель, минералог и кристаллограф, основоположник геохимии, биогеохимии

При решении квадратных уравнений ранее мы использовали различные «ухищрения»: на множестве натуральных чисел пользовались методом перебора, на множестве рациональных чисел – использовали различные способы разложения на множители, замечали особенности коэффициентов, сводили решение полного квадратного уравнения к неполному, выделяя квадрат из трехчлена и др. В данном пункте мы построим общие формулы, которые, как и любые универсальные способы действий, помогут нам быстрее и проще исследовать и решать любые квадратные уравнения независимо от их коэффициентов.

Для вывода общих формул корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ используем способ выделения полного квадрата так же, как мы делали это раньше для уравнений с числовыми коэффициентами. Тогда его решение сведется к решению неполного квадратного уравнения, которое нам уже известно.

Выделим из трехчлена $ax^2 + bx + c$ в левой части уравнения полный квадрат:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=a\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c=$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Таким образом, наше квадратное уравнение принимает вид неполного квадратного уравнения с неизвестным $x+\dfrac{b}{2a}$:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0.$$

Перенесем свободный член полученного неполного квадратного уравнения вправо от знака равенства, а затем разделим обе его части на коэффициент a $(a \neq 0)$:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0 \Leftrightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a} \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

Проанализируем полученное уравнение. Количество его корней зависит от знака числа, стоящего справа от знака равенства, то есть от дроби $\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$. Мы замечаем также, что знаменатель этой дроби всегда положителен, и значит, знак дроби совпадает со знаком числителя:

$$\boxed{b^2 - 4ac}$$

Таким образом, знак числа $b^2 - 4ac$ играет ключевую роль в исследовании количества корней квадратного уравнения. Поэтому ему дали специальное название – *дискриминант*, и обозначили буквой D.

Определение 1. Число $D = b^2 - 4ac$ называется **дискриминантом** квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

Сам термин «дискриминант» ввел английский математик Джеймс Джозеф Сильвестр сравнительно недавно – в XIX веке, образовав его от латинского *discriminar*, что в переводе означает «разбирать», «различать». И действительно, знак дискриминанта D позволяет нам выделить все возможные случаи решения квадратного уравнения.

Вернемся к полученному нами в результате равносильных преобразований уравнению $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$. В зависимости от знака дискриминанта $D = b^2 - 4ac$ возможны три случая.

<u>Случай 1</u>. $\boldsymbol{D < 0}$

Если $D < 0$, то в правой части данного уравнения стоит отрицательное число, а в левой – неотрицательное. Поэтому равенство $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2}$, не выполняется ни при каких значениях x, и уравнение не имеет корней.

<u>Случай 2</u>. $\boldsymbol{D = 0}$

Если $D = 0$, то наше уравнение приобретает вид:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x+\frac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

Значит, в данном случае уравнение имеет единственный корень $x = -\frac{b}{2a}$.

Отметим, что $D = 0$ в том и только том случае, когда квадратный трехчлен в левой части уравнения с точностью до числового множителя является полным квадратом линейного выражения.

<u>Случай 3</u>. $\boldsymbol{D > 0}$

Если $D > 0$, то правую часть нашего уравнения можно записать в виде квадрата числа: $\frac{b^2-4ac}{4a^2} = \frac{D}{4a^2} = \frac{\left(\sqrt{D}\right)^2}{(2a)^2} = \left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2$. Таким образом, мы имеем следующую цепочку равносильных преобразований:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow x+\frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{D}}{2a} \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{D}}{2a}$$

(запись $x+\frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{D}}{2a}$ означает, что $x+\frac{b}{2a} = +\frac{\sqrt{D}}{2a}$ или $x+\frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{D}}{2a}$).

Итак, в случае $D > 0$ квадратное уравнение имеет два различных корня.

Общая формула корней квадратного уравнения

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Заметим, что эта формула верна и в случае $D = 0$, если считать, что $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$. В этом случае говорят, что уравнение имеет один корень или два равных, совпавших корня. Их значения можно получить по общим формулам корней:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{0}}{2a} = -\frac{b}{2a},\quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{0}}{2a} = -\frac{b}{2a}.$$

Зная общую формулу, при решении квадратного уравнения каждый имеет две возможности: либо запомнить формулу и получать корни простой подстановкой (при $D > 0$), либо каждый раз выделять полный квадрат. Естественно, разумнее первое, именно поэтому поиск формулы шел в науке на протяжении многих столетий.

Попробуем по данной формуле решить уравнение $-123x^2 - 246x - 123 = 0$. Однако прежде чем его решать, заметим, что мы можем его упростить:

$$-123x^2 - 246x - 123 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0.$$

Таким образом, мы смогли избежать громоздких вычислений. Поскольку в новом уравнении, равносильном исходному, $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$, то:

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0 \text{ и } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot 1} = -1.$$

Поэтому мы можем сделать следующее ***полезное замечание***: прежде чем решать квадратное уравнение, следует проверить, нельзя ли упростить его, разделив все его коэффициенты на общий числовой множитель. В частности, если старший коэффициент (то есть коэффициент при x^2) отрицателен, то целесообразно сменить знак у всех коэффициентов уравнения: вероятность вычислительных ошибок при $a > 0$ уменьшается.

Мы приходим к следующему *алгоритму решения квадратных уравнений*.

Алгоритм решения квадратных уравнений

1. Если можно, упростить уравнение, разделив все его коэффициенты на их общий числовой множитель.

2. Выписать значения коэффициентов a, b и c полученного уравнения.

3. Вычислить дискриминант уравнения по формуле $D = b^2 - 4ac$.

4. Сравнить значение дискриминанта с нулем.

5. Воспользоваться таблицей:

$D < 0$	$D = 0$	$D > 0$
Уравнение не имеет корней	Вычислить корень уравнения по формуле: $x = -\frac{b}{2a}$	Вычислить корни уравнения по формулам: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ и $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$

6. Записать ответ.

Пример 1.

Решить уравнение $3x^2 - x + 1 = 0$.

Так как $a = 3$, $b = -1$, $c = 1$, то $D = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = -11 < 0$. Уравнение не имеет корней.

Ответ: $\varnothing$.

Пример 2.

Решить уравнение $7x^2 - 28x + 28 = 0$.

Разделим обе части уравнения на 7, уравнение примет вид: $x^2 - 4x + 4 = 0$.

Так как $D = 4^2 - 4 \cdot 3 = 0$, то уравнение имеет один корень $x = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$.

Ответ: $\{2\}$.

Пример 3.

Решить уравнения: а) $x^2 - 4x + 3 = 0$; б) $-2x^2 + 6x - 4 = 0$; в) $-x^2 + 7x - 5 = 0$.

а) $x^2 - 4x + 3 = 0$

$a = 1$, $b = -4$, $c = 4$; $D = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 > 0$.

Уравнение имеет два корня: $x_1 = \frac{4+\sqrt{4}}{2} = \frac{4+2}{2} = 3$; $x_2 = \frac{4-\sqrt{4}}{2} = \frac{4-2}{2} = 1$.

Ответ: $\{3; 1\}$.

б) $-2x^2 + 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

$a = 1$, $b = -3$, $c = 2$; $D = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 > 0$.

Уравнение имеет два корня: $x_1 = \frac{3+\sqrt{1}}{2} = 2$; $x_2 = \frac{3-\sqrt{1}}{2} = 1$.

Ответ: $\{2; 1\}$.

в) $-x^2 + 7x - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 5 = 0$

$a = 1$, $b = -7$, $c = 5$; $D = 49 - 4 \cdot 5 = 29 > 0$.

Уравнение имеет два корня: $x_1 = \frac{7+\sqrt{29}}{2}$; $x_2 = \frac{7-\sqrt{29}}{2}$.

Ответ: $\left\{\frac{7+\sqrt{29}}{2}; \frac{7-\sqrt{29}}{2}\right\}$.

Для простоты последнюю запись условно договоримся записывать так: $\left\{\frac{7\pm\sqrt{29}}{2}\right\}$, понимая под этим, естественно, запись, приведенную выше.

Мы видим, как использование построенных нами формул сократило трудоемкость решения квадратных уравнений. В этом, по сути, и состоит предназначение математики: устанавливать общие законы, которые помогают быстрее и проще решать жизненно важные задачи, связанные с безопасностью, развитием, благополучием людей. А сам язык математики позволяет увидеть «лишние», бесполезные действия и исключить их из своего арсенала созидательных средств.

Такие «лишние» действия мы можем обнаружить в некоторых случаях даже при использовании формул корней квадратного уравнения. Так, если коэффициент b четный, то есть $b = 2k$, то дискриминант равен: $D = b^2 - 4ac = (2k)^2 - 4ac = 4k^2 - 4ac$. Поэтому значение корней вычисляется так: $x = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4ac}}{2a}$.

Но это означает, что в случае четного коэффициента b мы выполняем лишние действия, и вычисления можно упростить:

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2k \pm \sqrt{4\left(k^2 - ac\right)}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{k^2 - ac}}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Значит, последняя формула позволяет оперировать меньшими числами и при этом избежать лишних операций: умножения ac на 4 и сокращения дроби на 2. Гораздо удобнее вычислить сразу «сокращенный» дискриминант $D_1 = \frac{D}{4} = k^2 - ac$, а затем вести вычисления по последней формуле.

Поэтому для уравнений вида $ax^2 + 2kx + c = 0$ используются так называемые *формулы четного коэффициента.*

Формула корней квадратного уравнения
с четным коэффициентом b

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}, \text{ где } b = 2k$$

Пример 4.

Решить уравнение $3x^2 - 16x + 5 = 0$.

$a = 3$, $k = -8$, $c = 5$; $D_1 = 64 - 3 \cdot 5 = 49 > 0$.

Уравнение имеет два корня: $x_1 = \frac{8+\sqrt{49}}{3} = \frac{8+7}{3} = 5$; $x_2 = \frac{8-\sqrt{49}}{3} = \frac{8-7}{3} = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\{5; \frac{1}{3}\}$.

К **296** Выделите полный квадрат двучлена:

а) $x^2 - 6x + 8$, $x^2 + 18x - 19$;

б) $x^2 + x - \frac{3}{4}$, $4x^2 + 3x - 1$;

в) $x^2 + 2bx + 1$, $ax^2 + x + 1$, $a \neq 0$.

Для чего можно использовать умение выделять полный квадрат?

297 Сколько корней имеет уравнение (a – некоторое заданное число)?

а) $x^2 = 0$; в) $x^2 = \frac{1}{25}$; д) $x^2 = \frac{1}{a^2}$;

б) $x^2 = 6$; г) $x^2 = -\frac{1}{25}$; е) $x^2 = \frac{-4}{|a|}$.

От чего зависит количество корней в этих уравнениях?
Какие случаи возможны?

298 Решите последовательно уравнения:

а) $x - 2 = -\frac{1}{2}$; б) $(x-2)^2 = \frac{1}{4}$; в) $4(x-2)^2 - 1 = 0$; г) $4x^2 - 16x + 15 = 0$.

Какое преобразование помогло свести последнее квадратное уравнение к известному случаю?

299 Используя результаты выполнения предыдущего задания, решите в общем виде уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$. При необходимости воспользуйтесь следующим планом:

1) Выделить полный квадрат двучлена в левой части.

2) После переноса дробного выражения вправо разделить обе части на старший коэффициент a. Выяснить, от чего будет зависеть количество корней полученного уравнения?

Предложить название для числа $b^2 - 4ac$? Сопоставить своё предложение с названием этого числа на стр. 76.

3) Продолжить решение квадратного уравнения, рассмотрев три случая: дискриминант отрицателен ($D < 0$); дискриминант равен нулю ($D = 0$); дискриминант положителен ($D > 0$).

Сравните свои результаты с формулами на стр. 76.

300 Определите, сколько корней имеет каждое из уравнений?

а) $3x^2 + 9x + 7 = 0$; в) $3x^2 + 9x - 7 = 0$; д) $4x^2 + 4x + 1 = 0$; ж) $4x^2 + 4x - 1 = 0$;

б) $3x^2 - 9x + 7 = 0$; г) $3x^2 - 9x - 7 = 0$; е) $4x^2 - 4x + 1 = 0$; з) $4x^2 - 4x - 1 = 0$.

301 Решите уравнение $2x^2 + 3x + 1 = 0$, используя новые формулы. Предложите свой алгоритм решения произвольного квадратного уравнения с помощью формул и сравните его с алгоритмом, приведенным на стр.77.

302 Решите уравнение $3x^2 + 5x - 2 = 0$ с помощью выделения полного квадрата, с помощью нового алгоритма. Какой из способов вам кажется более удобным?

303 Решите квадратное уравнение:

а) $6x^2 - x - 1 = 0$; в) $3x^2 - 5x + 1 = 0$; д) $x^2 - x + 1 = 0$;

б) $-x^2 + 8x - 16 = 0$; г) $2x^2 - 12x + 12 = 0$; е) $2x - x^2 - 6 = 0$.

304 1) Сравните второй коэффициент данных уравнений, что в них общего?

а) $x^2 - 2x - 8 = 0$; б) $x^2 + 8x + 7 = 0$; в) $3x^2 - 6x + 11 = 0$; г) $4x^2 + 4x + 1 = 0$.

2) Запишите эти уравнения в общем виде. Выведите формулу корней квадратного уравнения с четным коэффициентом b. Сопоставьте свои результаты с выводом формул на стр.78. Какие из указанных в учебнике преобразований вам удалось выполнить самостоятельно? Решите уравнения по этой формуле.

305 Какие из уравнений № 303 можно решить, применяя формулу корней квадратного уравнения с четным коэффициентом b? Решите их. При использовании какой из формул корней вам пришлось оперировать меньшими числами?

306 Решите уравнения:

а) $y^2 + 1 = -2{,}5y$; в) $3(x^2 - 2x + 4) - 2 = 4(x + 2)$;

б) $x(x - 3) = 10$; г) $(2x - 2)(3 - x) + (x + 2)^2 = 5(x + 3)(3 - x) - 31$.

307 Решите уравнения:

а) $3x^2 - 5\pi x + 6\pi^2 = 0$; б) $9x^2 - 6\sqrt{5}x + 2 = 0$; в) $x^2 + 3\sqrt{2}x + 4 = 0$.

π **308** Запишите высказывания на математическом языке с помощью кванторов общности ($\forall$) и существования ($\exists$). Докажите истинные высказывания, для ложных – постройте их отрицания.

а) Среди корней уравнения $6x^2 - 96 = 0$ есть отрицательное число.
б) Все корни уравнения $144 - x^2 = 0$ кратны 6.
в) Каждый корень уравнения $x^2 - 10 = 0$ имеет делитель, равный 5.
г) Некоторые корни уравнения $12x^2 - 108x = 0$ – составные числа.
д) Все решения уравнения $-5x^2 = 0$ являются элементами натурального ряда чисел.
е) Некоторые корни уравнения $2x^2 + 14 = 0$ при делении на 2 в остатке дают 1.
ж) Среди уравнений $x^2 - 121 = 0$; $5x^2 + 125 = 0$; $8x^2 - 64x = 0$; $36 - x^2 = 0$ есть такие, сумма корней которых равна нулю.
з) Каждый корень уравнения $3x^4 + 2x^2 = 0$ является рациональным числом.

309 Выясните, сколько решений имеют данные системы в зависимости от значения параметра a, и решите их:

а) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + ay = 10 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 6x + ay = 5 \end{cases}$; в) $\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + ay = 1 \end{cases}$.

310 Решите системы неравенств:

а) $\begin{cases} 3x - 5 \geqslant 4 \\ 9 - 2x > -3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3 - 3x \geqslant -2 \\ 4x - 3 > 2 \\ 6 + x \leqslant 4x + 2 \end{cases}$.

311 Решите совокупности неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l}2x-4\geqslant 0\\ -5x-1<14\end{array}\right.$; б) $\left[\begin{array}{l}4x-4>8\\ 5x-5<10.\\ -x+1\geqslant 2\end{array}\right.$

312 а) Дана функция

$f(x)=\begin{cases}x^2, \text{ если } x\geqslant 0;\\ g(x), \text{ если } x<0\end{cases}$

Задайте $g(x)$ так, чтобы функция $f(x)$ являлась нечетной.

б) Дана функция

$f(x)=\begin{cases}x^3, \text{ если } x>0;\\ h(x), \text{ если } x<0\end{cases}$

Задайте $h(x)$ так, чтобы функция $f(x)$ являлась четной.

Д **313** Решите уравнения:

а) $3x^2-5x+2=0$; б) $x^2+7x-30=0$; в) $3x^2-20x-52=0$; г) $5x^2+9x-14=0$.

314 Решите уравнения:

а) $x(x-10)=-24$; в) $(3x-7)(x+2)=(x-3)(x+5)$;

б) $2(2x^2+5)=x$; г) $(2y-2)(y-3)-18=(y-6)(y+3)$.

315 Из неравенств $x(x+2)<x^2-4$ и $-2{,}1x+3{,}3<2{,}1-1\frac{2}{5}x$ составьте и решите:

а) систему; б) совокупность.

С **316*** Верно ли, что если квадратные уравнения $x^2+ax+b=0$ и $x^2+cx+d=0$ не имеют корней, то и уравнение $x^2+\frac{a+c}{2}x+\frac{b+d}{2}=0$ также не имеет корней?

317* Даны действительные числа x, y, z. Докажите, что одно из чисел $x^2+2xy+z^2$, $y^2+2yz+x^2$, $z^2+2zx+y^2$ неотрицательно.

318* На доске написали квадратное уравнение с положительным коэффициентом при x^2. Каждую минуту на доске дописывают новое квадратное уравнение, причем у каждого следующего уравнения все три коэффициента на 1 больше соответствующих коэффициентов предыдущего. Докажите, что когда-нибудь на доске появится квадратное уравнение, не имеющее корней.

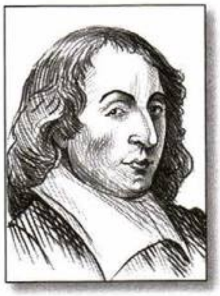
319* Известно, что разность кубов корней квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ равна 2013. Сколько корней имеет уравнение $ax^2+2bx+4c=0$?

320* Известно, что у каждого из уравнений $a_1x^2+b_1x+c_1=0$, $a_2x^2+b_2x+c_2=0$, $a_3x^2+b_3x+c_3=0$ есть хотя бы один действительный корень. Может ли так оказаться, что ни у одного из уравнений $(a_1+a_2)x^2+(b_1+b_2)x+c_1+c_2=0$, $(a_2+a_3)x^2+(b_2+b_3)x+c_2+c_3=0$, $(a_3+a_1)x^2+(b_3+b_1)x+c_3+c_1=0$ нет действительных корней?

321* Пусть $P(x)=x^2+ax+b$. Известно, что уравнение $P(x)=0$ имеет два различных корня. Сколько корней может иметь уравнение $P(x)+P(x+\sqrt{D})=0$?

322* Дискриминанты трёх квадратных уравнений с единичным коэффициентом при x^2 равны 1, 4 и 9. Докажите, что можно выбрать по одному корню каждого из них так, чтобы их сумма равнялась сумме оставшихся корней.

3. Решение уравнений, сводящихся к квадратным



Доводы, до которых человек додумывается сам, обычно убеждают его больше, нежели те, которые пришли ему в голову другим путем.

Блез Паскаль (1623–1662),
французский математик, физик, литератор, философ

Формулы корней квадратного уравнения, полученные нами в предыдущем пункте, можно применять для гораздо более широкого класса уравнений – для тех уравнений, которые сами по себе квадратными не являются, но могут быть сведены к квадратным с помощью замены неизвестных.

Решим, например, уравнение $2x^4 - 3x^2 + 1 = 0$. Оно напоминает нам квадратное уравнение, и после замены $x^2 = t$ мы получим квадратное уравнение $2t^2 - 3t + 1 = 0$.

Дискриминант полученного уравнения $D = 9 - 4 \cdot 2 = 1 > 0$, значит, оно имеет два корня: $t_1 = \dfrac{3+1}{4} = 1$, $t_2 = \dfrac{3-1}{4} = \dfrac{1}{2}$.

Теперь необходимо вернуться к «старому» неизвестному. Если $t = x^2 = 1$, то $x = \pm 1$; если $t = x^2 = \dfrac{1}{2}$, то $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Значит, исходное уравнение имеет четыре корня: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x_4 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Уравнения, подобные этому, встречаются довольно часто и поэтому имеют свое название.

***Определение* 1.** Уравнение $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где $a \neq 0$, называется **биквадратным** уравнением.

Этот термин образован с помощью латинской приставки bi, которая означает двойное, двукратное, его дословный перевод звучал бы как «дважды квадратное».

Пример 1.

Решить уравнения:

а) $x^4 - x^2 - 12 = 0$; б) $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$; в) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$.

Решение:

а) $x^4 - x^2 - 12 = 0$.

Пусть $x^2 = t$, тогда $t^2 - t - 12 = 0$, $D = 1 + 4 \cdot 12 = 49 > 0$.

Уравнение имеет два корня: $t_1 = \dfrac{1+\sqrt{49}}{2} = 4$, $t_2 = \dfrac{1-\sqrt{49}}{2} = -3$.

Вернемся к неизвестному x. Так как $t = x^2 \geqslant 0$, то корень $t = -3$ не подходит. Если $t = x^2 = 4$, то $x = \pm 2$.

Ответ: $\{2; -2\}$.

б) $x^4 + 4x^2 + 4 = 0$.

Пусть $x^2 = t$, тогда $t^2 - 4t + 4 = 0 \Leftrightarrow (t-2)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

Ответ: $\{\sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$.

в) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$.
Пусть $x^2 = t$, тогда $t^2 + 3t + 2 = 0$, $D = 9 - 4 \cdot 2 = 1 > 0$.

Уравнение имеет два корня:

$$t_1 = \frac{-3+1}{2} = -1,\ t_2 = \frac{-3-1}{2} = -2.$$

Так как $t = x^2 \geqslant 0$, то исходное уравнение не имеет корней.

Ответ: $\varnothing$.

Пример 2.
Решить уравнение $5x^2 - 6|x| + 1 = 0$.

Решение:
Пусть $|x| = t$, при этом $|x|^2 = x^2 = t^2$. Тогда $5t^2 - 6t + 1 = 0$, $D_1 = 9 - 5 = 4 > 0$.

Уравнение имеет два корня:

$$t_1 = \frac{3+2}{5} = 1,\ t_2 = \frac{3-2}{5} = \frac{1}{5}.$$

Вернемся к неизвестному x. Если $t = |x| = 1$, то $x = \pm 1$; если $t = |x| = \frac{1}{5}$, то $x = \pm\frac{1}{5}$.

Ответ: $\{1; -1; \frac{1}{5}; -\frac{1}{5}\}$.

Пример 3.
Решить уравнение $(x^2 + x + 1)^2 - 2(x^2 + x + 1) - 3 = 0$.

Решение:
Пусть $x^2 + x + 1 = y$, тогда $y^2 - 2y - 3 = 0$, $D_1 = 1 - (-3) = 4 > 0$.

Уравнение имеет два корня:

$$y_1 = \frac{1+2}{1} = 3,\ y_2 = \frac{1-2}{1} = -1.$$

Вернемся к неизвестному x. Возможны два варианта:
1) Если $y = x^2 + x + 1 = 3$, то $x^2 + x + 1 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$.

$$D = 1 + 4 \cdot 2 = 9 > 0,\ x_1 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2} = 1,\ x_2 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2} = -2.$$

2) Если $y = x^2 + x + 1 = -1$, то $x^2 + x + 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 2 = 0$.
$D = 1 - 4 \cdot 2 = -7 < 0$, уравнение не имеет корней.

Ответ: $\{1; -2\}$.

Сформулируем теперь в общем виде *метод замены неизвестного* для решения уравнений, сводящихся к квадратным.

Метод замены неизвестного
для решения уравнений, сводящихся к квадратным

1. Определить, какое выражение нужно обозначить новым неизвестным, чтобы получить квадратное уравнение.

2. Решить полученное уравнение относительно нового неизвестного.

3. Вернуться к «старому» неизвестному, приравнивая выражение, выбранное в пункте 1, к найденным значениям нового неизвестного.

4. Решить полученное уравнение (уравнения) относительно «старого» неизвестного.

Опыт решения предыдущих уравнений в рассмотренных примерах позволяет нам сформулировать несколько полезных подсказок.

ПОДСКАЗКИ

- Любое биквадратное уравнение $ax^4 + bx^2 + c = 0$ сводится к квадратному уравнению $at^2 + bt + c = 0$ при помощи замены $x^2 = t$ (при этом $t \geqslant 0$).
- Уравнение вида $ax^2 + b|x| + c = 0$ сводится к квадратному уравнению $at^2 + bt + c = 0$ при помощи замены $|x| = t$ (при этом $t \geqslant 0$).
- Часто помогает замена новым неизвестным повторяющегося выражения.

Несмотря на высокую абстрактность математических теорий, они удивительным образом оказываются полезными в практической деятельности для людей самых разных специальностей – от ученых, инженеров, исследователей до художников, поэтов, музыкантов. Например, строителю, геологу, альпинисту может потребоваться приблизительно узнать глубину ущелья или шахты, непосредственное измерение которой недоступно. И тогда на помощь придут знания из школьного курса физики и умение решать квадратные уравнения.

Пример 4.

Камень падает без начальной скорости на дно вертикальной шахты. Определить глубину шахты, если звук от удара камня о ее дно слышен через 6 секунд. Скорость звука в воздухе считать равной 330 м/с, сопротивлением воздуха при падении камня пренебречь.

Решение:

1) Обозначим глубину шахты h метров, $h > 0$.

2) Если время падения камня равно t_1 секунд, то из курса физики известно, что $h = \dfrac{gt_1^2}{2}$, где g – ускорение свободного падения. Выразим из этого равенства t_1.

$$h = \frac{gt_1^2}{2} \Leftrightarrow 2h = gt_1^2 \Leftrightarrow t_1^2 = \frac{2h}{g} \Leftrightarrow t_1 = \pm\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Так как время не может быть отрицательным, выберем $t_1 = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$.

3) Пусть время, в течение которого звук от удара дойдет до наблюдателя, равно t_2 секунд. Тогда $t_2 = \dfrac{h}{v}$, где v – скорость звука.

4) По условию $t_1 + t_2$ составляет 6 секунд, то есть $\dfrac{h}{v} + \sqrt{\dfrac{2h}{g}} = 6$.

Подставим в полученное равенство известные данные $v = 330$ м/с, $g = 9{,}8$ м/с^2, получим уравнение с неизвестным h:

$$\frac{h}{330} + \sqrt{\frac{2h}{9{,}8}} = 6.$$

5) Для решения полученного уравнения используем способ введения нового неизвестного. Пусть $\sqrt{h} = x$, тогда $h = x^2$ и наше уравнение примет вид квадратного:

$$\frac{x^2}{330} + \sqrt{\frac{2}{9{,}8}}x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \sqrt{\frac{2}{9{,}8}} \cdot 330x - 330 \cdot 6 = 0$$

Последнее уравнение приближенно можно записать: $x^2 + 149x - 1980 = 0$.

$D = 149^2 + 1980 \cdot 4 = 30121 > 0$, $\sqrt{D} \approx 173{,}6$.

Уравнение имеет два решения: $x_1 \approx \dfrac{-149+173{,}6}{2} = 12{,}3$; $x_2 \approx \dfrac{-149-173{,}6}{2} = -161{,}3$.

Вернемся к неизвестному h. Так как $x = \sqrt{h}$, то получим два уравнения:

$$\sqrt{h} = 12{,}3 \text{ и } \sqrt{h} = -161{,}3.$$

1) $\sqrt{h} = 12{,}3 \Leftrightarrow h = (12{,}3)^2 \approx 151$ метр.

2) $\sqrt{h} = -161{,}3$. Уравнение не имеет решения, так как значение арифметического квадратного корня по определению не может быть отрицательным.

Ответ: глубина шахты приблизительно равна 151 м.

Уточним, что эта задача решена нами на «физическом уровне строгости». Если же требуется найти «математически точное решение», то никакие округления не допустимы.

К **323** Представьте в виде квадрата: а) 9; б) 5; в) m^4; г) n^8; д) a^6. Какие определения, свойства использовали?

324 Решите устно:

а) $x^2 = 16$; б) $x^2 = 10$; в) $x^2 = 0$; г) $x^2 = -4$.

Корни какого из этих уравнений: 1) противоположны друг другу; 2) отсутствуют; 3) иррациональны?

325 Составьте пары из равносильных уравнений:

1) $(x^2)^2 = 81$; $x^4 = 81$; $x = 3$; $x = \pm 3$.

2) $|x|^2 = 2$; $x^2 = 2$; $|x| = 2$; $x = 2$.

3) $|x|^2 - 2|x| + 1 = 0$; $x^2 - 2x + 1 = 0$; $x^2 - 2|x| + 1 = 0$.

326 1) Сопоставьте уравнения $x^4 - x^2 - 12 = 0$ и $t^2 - t - 12 = 0$. Что интересного вы замечаете? Алгоритм решения какого из этих уравнений вам уже известен? Предположите, как второе уравнение может помочь найти корни первого.

2) Предложите замену, которая приводит первое уравнение ко второму.

3) Попробуйте решить уравнение $x^4 - x^2 - 12 = 0$. Сравните свое решение с решением этого уравнения на стр. 82.

327 Запишите эти уравнения в общем виде:

$x^4 - 2x^2 - 3 = 0$; $3x^4 + 8x^2 - 11 = 0$; $\frac{2}{3}x^4 + \frac{5}{6}x^2 - \frac{7}{12} = 0$; $x^4 - 3x^2 = 0$.

Как бы вы предложили назвать уравнения данного вида? Почему? Дайте определение уравнений указанного вида. Сравните свое определение с определением на стр.82 учебника.

328 1) Сопоставьте уравнения $5x^2 - 6|x| + 1 = 0$ и $5t^2 - 6t + 1 = 0$. Что интересного вы замечаете? Алгоритм решения какого из этих уравнений вам уже известен? Предположите, как второе уравнение может помочь найти корни первого.

2) Какой прием поможет перейти от первого уравнения ко второму?

3) Попробуйте решить уравнение $5x^2 - 6|x| + 1 = 0$. Сравните свое решение с решением этого уравнения на стр.85.

329 Решите уравнение: $(2x^2 - x + 2)^2 - 15(2x^2 - x + 2) + 36 = 0$.

1) Что интересного вы замечаете в записи этого уравнения?

2) Какой прием поможет привести данное уравнение к квадратному. Попробуйте решить это уравнение.

330 Какой прием объединяет решение уравнений № 326, № 328, № 329? Предложите свой метод решения уравнений, сводящихся к квадратным, а затем сравните его с методом, предложенным в учебнике на стр. 83.

331 Решите биквадратные уравнения:

а) $5x^4 - 8x^2 + 3 = 0$; б) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$; в) $x^4 - 2x^2 + 8 = 0$; г) $2x^4 + 9x^2 - 5 = 0$.

332 Решите уравнения:

а) $x^2 - 7|x| + 6 = 0$; б) $2x^2 + 3|x| - 9 = 0$; в) $x^2 + 5|x| + 4 = 0$.

333 Сколько корней может быть у уравнения

$x^2 + p|x| + q = 0$?

334 Решите уравнения:

а) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$;

б) $(x^2 - 2x)^2 + 3x^2 - 6x + 2 = 0$;

в) $x - \sqrt{x} - 12 = 0$.

335 Решите уравнение:

$(x - 1)^4 - x^2 + 2x - 73 = 0$.

336 Решите уравнение $\frac{1}{x^2 - 4x + 4} - \frac{6}{x - 2} = 7$.

337 Решите уравнение $4x^4 + 3x^3 + 32x + 24 = 0$.

338 Решите уравнения. Вычислите сумму или произведение корней уравнения.

а) $(x - 3)(2x + 5) = 0$;	$x_1 + x_2 \rightarrow$ **П**	н) $(x + 6)(3x - 5) = 0$;	$x_1 \cdot x_2 \rightarrow$ **М**
б) $(x + 3)^2 - 9 = 0$;	$x_1 + x_2 \rightarrow$ **У**	о) $(x - 5)^2 - 17 = 0$;	$x_1 \cdot x_2 \rightarrow$ **К**
в) $x^2 - 15 = 0$;	$x_1 + x_2 \rightarrow$ **С**	п) $x^2 - 8 = 0$;	$x_1 \cdot x_2 \rightarrow$ **Р**
г) $x^2 - 7x + 6 = 0$;	$x_1 + x_2 \rightarrow$ **О**	р) $2x^2 - x - 1 = 0$;	$x_1 \cdot x_2 \rightarrow$ **Х**
д) $x^2 + 5x - 6 = 0$;	$x_1 + x_2 \rightarrow$ **Ж**	с) $0{,}1x^2 + 0{,}6x + 0{,}5 = 0$;	$x_1 \cdot x_2 \rightarrow$ **Т**
е) $-x^2 - 2x + 8 = 0$;	$x_1 + x_2 \rightarrow$ **Е**	т) $x^2 - 6x + 2 = 0$;	$x_1 \cdot x_2 \rightarrow$ **Ы**
ж) $5x^2 - 11x + 2 = 0$;	$x_1 + x_2 \rightarrow$ **З**	у) $x^2 + 3\sqrt{5}x - 9 = 0$;	$x_1 \cdot x_2 \rightarrow$ **Л**
з) $3x^2 - 7x + 4 = 0$;	$x_1 + x_2 \rightarrow$ **Ь**	ф) $2x^2 + 6x - 3 = 0$;	$x_1 \cdot x_2 \rightarrow$ **Г**
и) $42 - x^2 - x = 0$;	$x_1 + x_2 \rightarrow$ **Я**	х) $x^2 - 10x + 12 = 0$;	$x_1 \cdot x_2 \rightarrow$ **Д**
к) $-3x^2 + 5x - 2 = 0$;	$x_1 + x_2 \rightarrow$ **Й**	ц) $4x^2 - \sqrt{7}x - 1 = 0$;	$x_1 \cdot x_2 \rightarrow$ **Н**
л) $-6x + x^2 - 16 = 0$;	$x_1 + x_2 \rightarrow$ **Б**	ч) $\frac{1}{3}x^2 + x + \frac{1}{5} = 0$;	$x_1 \cdot x_2 \rightarrow$ **Ш**
м) $4 - x^2 + 3x = 0$;	$x_1 + x_2 \rightarrow$ **И**	ш) $\frac{1}{4}x^2 - x - \frac{1}{3} = 0$;	$x_1 \cdot x_2 \rightarrow$ **В**

щ) $x^2 - 9x - 1 = 0$; $x_1 + x_2 \rightarrow$ **А**.

Сопоставив каждому результату букву, прочитайте обращение немецкого поэта Готхольда Лессинга (XVIII в.) к своим ученикам. А у вас есть свой девиз в учебной работе?

0	0,5	7	−8	$2\frac{1}{3}$	5	−2

,

7	0,6	3	6	9	$1\frac{2}{3}$	5	−2	0	$2\frac{1}{3}$

,

2,2	9	6	−9	−6	−5	12	9	$1\frac{2}{3}$	5	−2	0	$2\frac{1}{3}$

,

−0,25	7

−8	9	12	3

6	7	−1,5	9

,

−8	9	2,2	−10	2	0,6	−9	−1	$1\frac{2}{3}$	5	−2

,

3

−0,5	7	5	−1

8	−8	3	$-1\frac{1}{3}$	7

,

12	9

0	9	−10	3

!

339 Постройте графики функций:

а) $y=\begin{cases}3x, \text{ если } x>3;\\ 2x, \text{ если } -1\leqslant x\leqslant 3;\\ \dfrac{2}{x}, \text{ если } x<-1\end{cases}$ б) $y=\begin{cases}-\dfrac{2}{x}, \text{ если } x\geqslant 2;\\ x, \text{ если } 0\leqslant x\leqslant 2;\\ x+2, \text{ если } x<0\end{cases}$

Д **340** Решите уравнения:

а) $3x^4-5x^2-2=0$; б) $x^4+7x^2+6=0$; в) $2x^4-5x^2+2=0$.

341 Решите уравнения:

а) $9x^2-6|x|+1=0$; в) $7x^2+2|x|-5=0$;

б) $3x^2+5|x|+7=0$; г) $2x^2-5|x|+2=0$.

342 Решите уравнения:

а) $\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{8}{x}-4=0$; б) $\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{2}{|x+1|}-15=0$;

в) $(x^2-3x)^2-13x^2+39x+36=0$; г) $(x+2)^4-2x^2-8x-32=0$.

С **343*** Найдите отношение двух положительных чисел, если отношение их среднего арифметического к среднему геометрическому равно 25: 24. (Средним арифметическим неотрицательных чисел a и b называется $\dfrac{a+b}{2}$, а средним геометрическим – $\sqrt{ab}$.)

4. Теорема Виета и обратная к ней теорема

То, что вы были вынуждены открыть сами, оставляет в вашем уме дорожку, которой вы можете снова воспользоваться, когда в этом возникнет необходимость.

Г.К. Лихтенберг (1742–1799),
выдающийся немецкий учёный и публицист

Мы владеем общими формулами корней квадратного уравнения, разобрались в том, когда и для чего они были созданы. Но в общих математических теориях иногда удается установить правила, которые позволяют при определенных условиях действовать быстрее и эффективнее. Так, разность $100\,255 - 99\,999$ можно вычислить по общему правилу письменно в столбик, а можно – моментально устно, выполнив действия $100\,255 - 100\,000 + 1 = 256$. Такие короткие и остроумные решения в математике называют *красивыми*, потому что они доставляют эстетическую радость тем, кто их использует, и особенно тем, кто придумывает. Вспомните, как бывает приятно сокращать «длинные» и «многоэтажные» дроби, заменяя их простыми и удобными.

В XVI веке французский математик Франсуа Виет открыл закономерности, которые нередко сокращают не только поиск корней квадратного уравнения, но и решение разнообразных алгебраических задач. Идея открытия, прославившего его имя, очень проста: выразить в общем виде сумму и произведение корней квадратного уравнения. Попробуйте повторить его открытие и сравните свой результат с формулировкой и доказательством теоремы, приведенной ниже.

Теорема Виета

Если x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \ x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Доказательство:

По общим формулам корней квадратного уравнения $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, где $D = b^2 - 4ac$.

Составим сумму и произведение корней x_1 и x_2.

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a} - \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a} = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right) = \frac{\left(-b+\sqrt{D}\right)\left(-b-\sqrt{D}\right)}{2a \cdot 2a} =$$

$$= \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{D}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2 - D}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a},$$ что и требовалось доказать.

Итак, *сумма корней квадратного уравнения равна отношению коэффициента при x к старшему коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение этих корней равно отношению свободного члена к старшему коэффициенту.*

Замечание. Обратим внимание, что в формулировке теоремы условие «x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$» подразумевает, что это уравнение имеет два корня (которые, в частности, могут быть совпавшими). Следовательно, $D \geqslant 0$, и поэтому специально оговаривать условие $D \geqslant 0$ не нужно.

Доказанная нами теорема существенно облегчает выполнение некоторых заданий.

Пример 1.

Найти сумму и произведение корней уравнения $3x^2 - 5x + 1 = 0$.

Решение:

Убедимся в том, что уравнение имеет корни, для этого вычислим его дискриминант. $D = 25 - 4 \cdot 3 = 13$, $D > 0$, значит, уравнение имеет корни.

$a = 3$, $b = -5$, $c = 1$, поэтому по теореме Виета $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = \dfrac{5}{3} = 1\dfrac{2}{3}$, $\quad x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{3}$.

Отметим, что непосредственное вычисление корней уравнения потребовало бы от нас гораздо больших усилий: надо было бы найти корни $x_1 = \dfrac{5+\sqrt{13}}{6}$ и $x_2 = \dfrac{5+\sqrt{13}}{6}$, затем сложить и перемножить иррациональные числа. Теорема Виета позволила получить ответ практически сразу.

Использование теоремы Виета часто оказывается полезным и при работе с более сложными выражениями, составленными из корней квадратного уравнения.

Пример 2.

Для корней x_1 и x_2 уравнения $2x^2 - 9x + 1 = 0$ найти значения выражений:

а) $x_1^2 + x_2^2$; б) $x_1^3 + x_2^3$.

Решение:

По теореме Виета $x_1 + x_2 = \dfrac{9}{2}$, $\quad x_1 x_2 = \dfrac{1}{2}$. Поэтому:

а) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \left(\dfrac{9}{2}\right)^2 - 2 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{81}{4} - 1 = \dfrac{77}{4} = 19\dfrac{1}{4}$;

б) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)\left[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2\right] =$

$= (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = \left(\dfrac{9}{2}\right)^3 - 3 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{9}{2} = \dfrac{729}{8} - \dfrac{27}{4} = \dfrac{675}{8} = 84\dfrac{3}{8}$.

Теорема Виета применяется и во многих других заданиях. Например, она позволяет быстро находить второй корень квадратного уравнения, если первый легко угадывается или известен по каким-либо причинам. В самом деле, пусть x_1 – известный корень уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$, тогда второй корень x_2 удобно найти из соотношений $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ или $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Пример 3.

Решить уравнения: а) $17x^2 - 23x + 6 = 0$; б) $35x^2 + 18x - 17 = 0$.

Решение:

а) $17x^2 - 23x + 6 = 0$.

Так как $17 - 23 + 6 = 0$, то корнем данного уравнения является число $x_1 = 1$. Тогда из соотношения $x_1 x_2 = \dfrac{6}{17}$ находим: $x_2 = \dfrac{6}{17} : x_1 = \dfrac{6}{17} : 1 = \dfrac{6}{17}$.

б) $35x^2 + 18x - 17 = 0$.

Так как $35 - 18 - 17 = 0$, то корнем данного уравнения является число $x_1 = -1$. Тогда из соотношения $x_1x_2 = -\frac{17}{35}$ находим: $x_2 = -\frac{17}{35} : x_1 = -\frac{17}{35} : (-1) = \frac{17}{35}$.

Итак, теорема Виета, установленная с помощью простого сложения и умножения общих формул корней квадратного уравнения, дает нам красивые, быстрые решения самых разнообразных задач. Естественно выяснить, выполняется ли обратная теорема? И если да, то в заданиях какого типа она может быть полезна?

Теорема, обратная к теореме Виета

Если числа x_1 и x_2 удовлетворяют соотношениям $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 = \frac{c}{a}$, то эти числа x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$.

Доказательство:

Так как $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, то $a \neq 0$ и $x_2 = -\frac{b}{a} - x_1$. Подставим это выражение для x_2 в равенство $x_1x_2 = \frac{c}{a}$. Получим:

$$x_1\left(-\frac{b}{a} - x_1\right) = \frac{c}{a} \Leftrightarrow -ax_1^2 - bx_1 = c \Leftrightarrow ax_1^2 + bx_1 + c = 0.$$

Значит, число x_1 является корнем уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$, что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается, что число x_2 является корнем этого уравнения.

Замечание. В формулировке обратной теоремы также не нужно оговаривать, что $D \geqslant 0$. Дело в том, что если числа x_1 и x_2 удовлетворяют указанным соотношениям, то они являются корнями уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$. Следовательно, числа a, b, c таковы, что это уравнение имеет корни, а значит, $D = b^2 - 4ac \geqslant 0$.

Среди квадратных уравнений выделяются уравнения со старшим коэффициентом a, равным 1. Они имеют вид $x^2 + px + q = 0$ и называются *приведенными* квадратными уравнениями.

***Определение* 1.** Квадратное уравнение вида $x^2 + px + q = 0$, где p, q – некоторые числа, называют **приведенным** квадратным уравнением.

Любое квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ можно *привести* к виду $x^2 + px + q = 0$, разделив обе его части на a. Отсюда и название – «приведенное» квадратное уравнение.

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 + px + q = 0, \text{ где } p = \frac{b}{a},\ q = \frac{c}{a}.$$

Таким образом, на основании теоремы Виета сумма корней приведенного квадратного уравнения равна $(-p)$, а произведение равно q.

Сумма корней приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ равна коэффициенту при x с противоположным знаком, а произведение – свободному члену.

$$x_1 + x_2 = -p,\ x_1x_2 = q$$

А по теореме, обратной теореме Виета:

Если числа x_1 и x_2 удовлетворяют соотношениям $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = q$, то эти числа x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Поэтому при использовании теоремы Виета и теоремы, обратной к ней, работать с приведенными квадратными уравнениями гораздо удобнее.

Рассмотрим примеры заданий, при выполнении которых используется теорема, обратная к теореме Виета.

Пример 4.

Составить квадратное уравнение, имеющее два заданных корня: $x_1 = 3$, $x_2 = 5$.

Решение:

Вычислим сумму и произведение корней квадратного уравнения: $x_1 + x_2 = 8$ и $x_1 x_2 = 15$. Значит, $p = -8$, $q = 15$, и по теореме, обратной теореме Виета, x_1 и x_2 являются корнями приведенного квадратного уравнения $x^2 - 8x + 15 = 0$.

Пример 5.

Решить квадратное уравнение $x^2 - 19x + 34 = 0$ устно.

Решение:

При таких коэффициентах устно вычислить корни уравнения по общим формулам достаточно сложно. Но мы можем их подобрать из соотношений:

$$x_1 + x_2 = -p = 19,\ x_1 x_2 = q = 34.$$

Этим условиям, очевидно, удовлетворяют числа $x_1 = 17$, $x_2 = 2$. Значит, по теореме, обратной теореме Виета, эти числа и будут являться корнями уравнения.

Данный способ решения квадратных уравнений может применяться в любом подобном случае: если удается подобрать числа x_1 и x_2, такие, что $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 x_2 = q$, то эти числа по теореме, обратной теореме Виета, являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$. Однако, к сожалению, он не является универсальным даже для приведенных уравнений с целыми коэффициентами (уравнение может вообще не иметь корней, либо они могут быть иррациональными).

Рассмотрим задания, которые требуют применения как прямой, так и обратной теорем Виета.

Пример 6.

Уравнение $x^2 + 8x - 3 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Составить уравнение, корнями которого являются числа $2x_1 + 3$ и $2x_2 + 3$.

Решение:

По теореме Виета $x_1 + x_2 = -8$, $x_1 x_2 = -3$.

Тогда:

$(2x_1 + 3) + (2x_2 + 3) = 2(x_1 + x_2) + 6 = -16 + 6 = -10$,

$(2x_1 + 3)(2x_2 + 3) = 4x_1 x_2 + 6\,(x_1 + x_2) + 9 = -12 - 48 + 9 = -51$.

По теореме, обратной теореме Виета, искомое уравнение $x^2 + 10x - 51 = 0$.

Пример 7.

Доказать, что уравнение $x^2 + px + q = 0$, где $q < 0$, обязательно имеет два корня разного знака.

Доказательство:

Сначала оценим знак дискриминанта уравнения.

$D = p^2 - 4q > 0$, так как $p^2 \geqslant 0$, $-4q > 0$.

Значит, уравнение имеет два различных корня. Произведение этих корней по теореме Виета равно $x_1 x_2 = q$, где по условию $q < 0$. Поэтому корни x_1 и x_2 должны обязательно иметь различный знак.

К **344** Выпишите коэффициенты квадратных уравнений:

$$3x^2 + 2x - 5 = 0;\ x^2 - 6x - 91 = 0.$$

1) Для какого из этих уравнений значение выражения $-\dfrac{b+c}{a}$ равно 1?

2) Сумма корней $x_1 + x_2$ какого из этих уравнений равна 6?

345 1) Заполните таблицу для коэффициентов и корней уравнения $3x^2 + 2x - 5 = 0$.

$x_1 + x_2$	$x_1 \cdot x_2$	$-\dfrac{b}{a}$	$\dfrac{c}{a}$

Сравните полученные в таблице значения. Что интересного вы замечаете?

2) Проведите подобные вычисления для какого-нибудь произвольного квадратного уравнения.

3) Сформулируйте гипотезу о свойствах корней квадратного уравнения и докажите ее в общем виде. При необходимости воспользуйтесь следующим планом:

1) Записать корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ в общем виде.
2) Найти сумму его корней.
3) Найти произведение его корней.
4) Сопоставить полученные выражения с коэффициентами уравнения.
5) Сверить свой вывод с теоремой Виета на стр. 88.

346 Найдите сумму и произведение корней квадратного уравнения, если они существуют.

а) $x^2 - 3x + 2 = 0$; б) $-x^2 - 7x + 8 = 0$; в) $2x^2 - 6x + 1 = 0$.

347 Для корней x_1 и x_2 уравнения $5x^2 + 10x - 1 = 0$ найти значения выражений:

а) $x_1^2 + x_2^2$; б) $x_1^3 + x_2^3$.

348 Запишите уравнения:

$x^2 - 3x - 10 = 0$; $x^2 + 4x - 12 = 0$; $x^2 - 11x + 28 = 0$; $x^2 + 16x + 15 = 0$ в общем виде. Какое определение вы бы дали такому квадратному уравнению? Сопоставьте свой вариант с определением, предложенным на стр. 90.

349 Представьте в виде приведенного квадратного уравнения:

а) $2x^2 - 8x + 14 = 0$; б) $0{,}2x^2 + 4x - 1 = 0$; в) $2\dfrac{2}{3}x^2 - x - 10 = 0$.

350 Сформулируйте теорему Виета и теорему, обратную к ней, для приведенных квадратных уравнений. Сопоставьте свою формулировку с предложенной в учебнике на стр. 90.

Решите уравнения из задания № 348, применяя теорему, обратную теореме Виета.

351 1) Решите устно уравнения:

а) $x^2 + 99x - 100 = 0$; в) $-x^2 + 6x - 5 = 0$;

б) $x^2 + 548x - 549 = 0$; г) $-x^2 - 7x + 8 = 0$.

2) Чему равна сумма коэффициентов в этих уравнениях? Проанализируйте корни, полученные вами в этих уравнениях. Сформулируйте гипотезу, исходя из своих наблюдений.

352 1) Решите устно уравнения:

а) $x^2 + 12x + 11 = 0$; б) $3x^2 + x - 2 = 0$; в) $x^2 + 7x + 6 = 0$.

2) Найдите сумму первого коэффициента и свободного члена и сопоставьте ее со вторым коэффициентом. Что интересного вы замечаете? Проанализируйте корни, полученные вами в этих уравнениях. Сформулируйте гипотезу, исходя из своих наблюдений.

353 а) Докажите, что если для коэффициентов уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ выполняется равенство $a + b + c = 0$, то $x_1 = 1$, а $x_2 = \frac{c}{a}$.

б) Докажите, что если для коэффициентов уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ выполняется равенство $a + c = b$, то $x_1 = -1$, а $x_2 = -\frac{c}{a}$.

354 Используя, результаты выполнения предыдущего задания, решите устно уравнения:

а) $2x^2 + 3x - 5 = 0$; в) $-35x^2 - 13x + 22 = 0$;

б) $1021x^2 - 2x - 1019 = 0$; г) $\frac{6}{7}x^2 + x + \frac{1}{7} = 0$.

355 Найдите рациональный корень уравнения $x^2 + 2\left(1+\sqrt{8}\right)x + 8\sqrt{2} = 0$.

356 Можно ли число 15 представить в виде суммы двух чисел так, чтобы их произведение было равно а) 50; б) 60; в) 70?

357 При каких значениях x выражение $(x - 1)(x + 5)$ равно $(a - 1)(a + 5)$?

358 Не решая уравнений, определите знаки их корней, если они существуют:

а) $x^2 - 4x + 3 = 0$; в) $-20x^2 - 3x + 2 = 0$; д) $-3x^2 + 17 = 0$;

б) $6x^2 - x - 1 = 0$; г) $x^2 - x - 6 = 0$; е) $x^2 + x + 1 = 0$.

359 Составьте квадратное уравнение, корнями которого были бы числа:

а) 2 и -3; б) -1 и -5; в) $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{6}$; г) $-\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{3}$.

360 Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами так, чтобы его корни были равны:

а) $-\frac{1}{5}$ и $\frac{2}{3}$; б) $\frac{4}{7}$ и 5; в) $-1\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{9}$; г) $-0{,}3$ и $-0{,}4$.

361 Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, корни которого равны $1-\sqrt{5}$ и $1+\sqrt{5}$.

362 Могут ли корнями квадратного уравнения с натуральными коэффициентами быть числа $\frac{3}{2}$ и $-\frac{2}{3}$?

363 Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, если известно, что один из его корней равен:

а) $2+\sqrt{3}$; б) $3-\sqrt{2}$.

364 Пусть x_1, x_2 – корни уравнения $2x^2 - 4x + 1 = 0$. Найдите значение выражения $x_1x_2^3 + x_1^3x_2$.

365 Пусть x_1, x_2 – корни уравнения $3x^2 - 13x - 5 = 0$. Найдите значение выражения $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

366 Пусть x_1, x_2 – корни уравнения $x^2 - 17x + 52 = 0$. Найдите значение выражения $\left(\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}\right)$.

П **367** Для следующих теорем сформулируйте обратные теоремы. Верны ли получившиеся обратные теоремы?

а) Если натуральное число оканчивается на 5, то это число делится на 5.

б) Если сумма цифр натурального числа делится на 3, то это число делится на 3.

в) Если коэффициенты уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ таковы, что $ac < 0$, то это уравнение имеет два различных корня.

г) Если числа a и b положительны, то их сумма $a + b$ положительна.

368 Решите уравнения. Найдите разность большего ($x_б$) и меньшего ($x_м$) корней каждого из уравнений:

а) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$; $x_б - x_м \to$ **Ф**

б) $9x^4 + 8x^2 - 1 = 0$; $x_б - x_м \to$ **А**

в) $24x^4 - 2x^2 - 1 = 0$; $x_б - x_м \to$ **Н**

г) $2x^4 + 7x^2 - 9 = 0$; $x_б - x_м \to$ **Е**

д) $5x^4 - 11x^2 + 2 = 0$; $x_б - x_м \to$ **И**

е) $4x^2 + 3|x| - 1 = 0$; $x_б - x_м \to$ **В**

ж) $x^2 - 3|x| + 2 = 0$; $x_б - x_м \to$ **О**

з) $21x^2 + |x| - 2 = 0$; $x_б - x_м \to$ **Т**

и) $\sqrt{10}\,x^2 - 3|x| - \sqrt{10} = 0$; $x_б - x_м \to$ **Х**

к) $2x^2 + 9|x| + 7 = 0$. $x_б - x_м \to$ **У**

Сопоставив результат с буквой, расшифруйте слово. Относится ли данный вид спорта к олимпийским?

6	2	$\sqrt{10}$	$\frac{4}{7}$	4	0,5	$\frac{2}{3}$	1	$2\sqrt{2}$	2

Д **369** Решите устно уравнения:

а) $-x^2 + 3x - 2 = 0$;

б) $x^2 + 7x - 8 = 0$;

в) $x^2 + 999x - 1000 = 0$;

г) $13x^2 + 25x + 12 = 0$.

370 Не решая уравнений, определите знаки их корней, если они существуют:

а) $x^2 - 6x + 5 = 0$; б) $x^2 - x - 42 = 0$; в) $x^2 + 3x - 10 = 0$ г) $x^2 - x + 6 = 0$.

371 Пусть x_1, x_2 – корни уравнения $2x^2 + 3x - 4 = 0$. Найдите значение выражения $16\left(x_1^4 + x_2^4\right)$.

372 Составьте квадратное уравнение, корнями которого были бы числа:

а) 5 и 3; б) 1 и -3; в) $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{3}$; г) $\frac{1}{5}$ и $-\frac{1}{2}$.

373 Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами так, чтобы его корни были равны:

а) 2 и $\frac{3}{2}$; б) $-\frac{1}{7}$ и $\frac{1}{2}$; в) 0,75 и $-0{,}2$.

374 Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, если известно, что один из его корней равен:

а) $1-\sqrt{5}$; б) $2+\sqrt{2}$.

375 Для следующих теорем сформулируйте обратные теоремы. Верны ли получившиеся обратные теоремы?

а) Если две последние цифры числа образуют число, кратное 4, то это число делится на 4.

б) Если числа a и b положительны, то их произведение ab положительно.

в) Если дискриминант квадратного уравнения меньше нуля, то это уравнение не имеет решения.

C **376*** Произведение четырех чисел – корней уравнений $x^2 + 2bx + c = 0$ и $x^2 + 2cx + b = 0$, где b и c – положительны, равно единице. Найдите b и c.

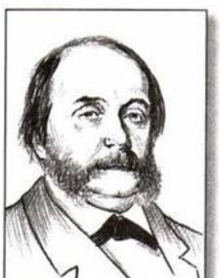
377* Найдите все такие простые p и q, что уравнение $px^2 + pqx + q = 0$ имеет целые корни.

378* Трехчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c – целые, c – нечетное) таков, что квадратное уравнение $P(x) = 0$ имеет целые корни. Может ли $P(111)$ быть нечетным числом?

379* Известно, что корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ – целые числа, а p и q – простые числа. Найдите p и q.

380* Известно, что квадратные уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и $bx^2 + cx + a = 0$ (a, b, c – отличные от нуля числа) имеют общий корень. Найдите его.

5. Квадратный трехчлен и его разложение на множители



Источник знания неистощим: какие успехи ни приобретай человечество на этом пути, все людям будет оставаться искать, открывать и познавать.

И.А. Гончаров (1812–1891),
русский писатель; член-корреспондент Петербургской академии наук по разряду русского языка и словесности

В предыдущих пунктах мы убедились в том, как важно уметь преобразовывать и раскладывать на множители выражение $ax^2 + bx + c$, стоящее в левой части квадратного уравнения. В данном пункте мы научимся делать это быстрее и проще, чем раньше. В этом нам поможет открытие Виета, которое на протяжении нескольких веков вызывает восхищение математиков своими возможностями упрощать решение задач. Прежде чем познакомиться с новым следствием теоремы Виета, введем несколько определений.

***Определение* 1. Квадратным трехчленом с переменной x** называется выражение $ax^2 + bx + c$, где a, b, c – некоторые числа, $a \neq 0$.

Так, квадратными трехчленами являются выражения $x^2 + x - 12$ и $3x^2 - x - 4$. Интересно, что выражения $2x^2 - 5x$, $4x^2 + 1$ и даже $7x^2$ тоже будут квадратными трехчленами – это менее очевидно, однако полностью соответствует определению 1.

Как и любое выражение с переменной, квадратный трехчлен при разных значениях переменной x принимает некоторые значения. Значения переменной, при которых он обращается в нуль, называют, по аналогии с уравнениями, *корнями* квадратного трехчлена.

Определение 2. **Корнем квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$** называется значение переменной x, которое обращает квадратный трехчлен в нуль.

Например, число $x = 3$ является корнем квадратного трехчлена $x^2 + x - 12$, так как $3^2 + 3 - 12 = 0$. Аналогично, число $x = -1$ – корень квадратного трехчлена $3x^2 - x - 4$, поскольку $3 \cdot (-1)^2 + 1 - 4 = 0$.

Из приведенных определений следует, что корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ совпадают с корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Поэтому число корней квадратного трехчлена определяется знаком дискриминанта квадратного уравнения. Поэтому дискриминант уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ мы будем называть также *дискриминантом квадратного трехчлена* $ax^2 + bx + c$.

Чтобы найти корни квадратного трехчлена, достаточно решить соответствующее квадратное уравнение. При этом можно использовать как общие формулы корней, так и теорему, обратную теореме Виета.

Пример 1.

Найдите корни квадратного трехчлена $x^2 - 2x - 24$.

Решение:

Решим квадратное уравнение $x^2 - 2x - 24 = 0$.

Подберем числа x_1 и x_2, такие, что $x_1 + x_2 = 2$, $x_1x_2 = -24$.

Данным равенствам удовлетворяют числа 6 и –4. Значит, по теореме, обратной теореме Виета, корнями данного уравнения являются числа $x_1 = 6$ и $x_2 = -4$. Эти же числа являются одновременно и корнями квадратного трехчлена.

Ответ: $x_1 = 6$, $x_2 = -4$.

Мы вновь убеждаемся в том, как полезно открытие Виета при решении квадратных уравнений. Оказывается, что оно позволяет также найти удобный ***способ разложения квадратного трехчлена на множители.***

Теорема 1.

Если квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$ имеет два корня x_1 и x_2, то он раскладывается на линейные множители: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Доказательство:

Если квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два корня x_1 и x_2, то они являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

По теореме Виета $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{c}$, $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$. Отсюда $b = -a(x_1 + x_2)$, $c = ax_1x_2$.

Подставим полученные выражения в квадратный трехчлен вместо b и c:

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2 = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2) =$$
$$=a(x(x - x_1) - x_2(x - x_1)) = a(x - x_1)(x - x_2),$$ что и требовалось доказать.

Следствие из теоремы 1.

Если квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, имеет один корень x_1, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.

Доказательство:

Если квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет один корень x_1, то один корень имеет и квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$. Значит, его дискриминант $D = 0$, и, как было показано в п. 4.1.2, речь фактически идет не об одном корне, а о двух «совпавших» корнях $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$.

Тогда на основании теоремы 1:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x - x_1)(x - x_1) = a(x - x_1)^2,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2.

Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$, не имеющий корней, не раскладывается на линейные множители.

Доказательство (методом от противного):

Пусть квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет корней. Предположим, что он раскладывается на множители $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 – некоторые числа (вынесенный за скобки числовой множитель должен равняться коэффициенту при x^2, то есть a). Тогда квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ обращается в нуль при $x = x_1$ и $x = x_2$. Но тогда числа x_1 и x_2 по определению являются его корнями, что противоречит условию.

Полученное противоречие доказывает теорему.

Итак, мы можем сделать общий вывод:

Если квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$:
- имеет два корня x_1 и x_2, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$;
- имеет один корень x_1, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$;
- не имеет корней, то он не раскладывается на линейные множители.

Из рассуждений, проведенных в теоремах 1–2, следует, что:

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow a(x-x_1)(x-x_2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=x_2 \end{array}\right. .$$

Значит, разложение на множители $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ всегда показывает, что корнями квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ являются числа x_1 и x_2. Аналогично, в случае разложения $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$ квадратный трехчлен имеет один корень x_1 и, с точностью до постоянного множителя, является полным квадратом линейного выражения.

Пример 2

Разложить на множители квадратные трехчлены: а) $2x^2 - 5x + 2$; б) $6x^2 - 11x + 5$; в) $3x^2 - 7x + 3$; г) $2x^2 - 12x + 18$; д) $3x^2 - 15x + 18$; е) $x^2 + x + 2$.

Решение:

а) $2x^2 - 5x + 2$.

$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9 > 0$, поэтому квадратный трехчлен имеет два корня x_1 и x_2.

По формуле корней квадратного уравнения:

$$x_1 = \frac{5+\sqrt{9}}{4} = \frac{5+3}{4} = 2; \; x_2 = \frac{5-\sqrt{9}}{4} = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}.$$

Значит, $2x^2-5x+2 = 2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right) = (x-2)(2x-1)$.

б) $6x^2 - 11x + 5$.

Одним из корней трехчлена, очевидно, является число 1, так как $6 - 11 + 5 = 0$.

Так как по теореме Виета произведение корней равно $\frac{5}{6}$, то другим корнем является число $\frac{5}{6}$. Поэтому $6x^2-11x+5 = 6(x-1)\left(x-\frac{5}{6}\right) = (x-1)(6x-5)$.

в) $3x^2 - 7x + 3$.

$D = 49 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 13 > 0$, поэтому квадратный трехчлен имеет два корня x_1 и x_2.

По формуле корней квадратного уравнения: $x_1 = \dfrac{7+\sqrt{13}}{6}$, $x_2 = \dfrac{7-\sqrt{13}}{6}$. Значит,

$$3x^2 - 7x + 3 = 3\left(x - \frac{7+\sqrt{13}}{6}\right)\left(x - \frac{7-\sqrt{13}}{6}\right).$$

В данном случае корни иррациональны, поэтому более «красивого» разложения здесь не получится.

г) $2x^2 - 12x + 18$.

Для упрощения дальнейших выкладок вынесем за скобки число 2. Тогда:

$$2x^2 - 12x + 18 = 2(x^2 - 6x + 9) = 2(x - 3)^2.$$

Такое разложение получилось потому, что данный квадратный трехчлен имеет единственный корень $x_1 = 3$; $D = 12^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18 = 0$.

д) $3x^2 - 15x + 18$.

Для упрощения дальнейших выкладок вынесем за скобки число 3. Тогда:

$3x^2 - 15x + 18 = 3(x^2 - 5x + 6)$

По теореме, обратной теореме Виета, числа $x_1 = 3$ и $x_2 = 2$ являются корнями данного квадратного трехчлена ($x_1 + x_2 = 5$, $x_1x_2 = 6$). Поэтому $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$, и значит, $3x^2 - 15x + 18 = 3(x^2 - 5x + 6) = 3(x - 3)(x - 2)$.

е) $x^2 + x + 2$.

$D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7 < 0$, значит, квадратный трехчлен $x^2 + x + 2$ нельзя разложить на линейные множители.

К **381** 1) Назовите степени многочленов:

а) $5a + 3b - c$; б) $2m^5n - 0{,}1m^2n^2 + 6m^3$; в) $x^2 + 9x + 18$.

2) Каким одним термином можно назвать все три многочлена?

3) Как можно назвать третий многочлен? Сравните свое определение с тем, которое приведено на стр. 95.

382 Какие многочлены:

а) $2x^2 - 3x + 1$; б) $4x^2 + 15$; в) $0{,}6x^2 - 5x$; г) $10x^2$; д) $x^2 + 3x^2 + 18 - 6x$

являются квадратными трехчленами? Обоснуйте свой выбор.

383 1) При каких значениях переменной x квадратный трехчлен $3x^2 - 5x + 2$ равен 0?

2) Какое название вы бы дали тем значениям x, при которых трехчлен становится равным нулю? Сопоставьте свой вариант с предложенным на стр.96.

384 Найдите корни квадратных трехчленов:

а) $3x^2 - 5x + 2$; б) $4x^2 - 9$; в) $2x^2 - 7x + 5$.

385 1) Попробуйте разложить на множители квадратный трехчлен $5x^2 + 5x + 1$. Удобны ли в этом случае известные вам способы?

2) Разложите на множители квадратный трехчлен $2x^2 - 16x + 30$ известными вам способами. Решите квадратное уравнение $2x^2 - 16x + 30 = 0$. Что интересного вы заметили? Сформулируйте гипотезу о новом способе разложения квадратного трехчлена на множители.

3) Попробуйте доказать свою гипотезу в общем виде или познакомьтесь с ее доказательством, приведенным на стр. 96–97.

4) Разложите на множители $5x^2 + 5x + 1$, применив новый способ.

386 1) Решите квадратные уравнения:

а) $-x^2 - 0{,}5x + 1{,}5 = 0$; б) $9x^2 + 12x + 4 = 0$; в) $5x^2 - x + 1 = 0$.

2) Разложите на множители трехчлены $-x^2 - 0{,}5x + 1{,}5$; $9x^2 + 12x + 4$. Что интересного вы наблюдаете?

3) Предположите, как решение третьего уравнения отразится на разложении на множители трехчлена $5x^2 - x + 1$?

4) Сравните свое предположение с утверждениями на стр.97.

387 Разложите на множители квадратные трехчлены:

а) $x^2 - 5x + 6$; б) $3x^2 - 5$; в) $-2x^2 + 5x - 3$.

388 Докажите, что данные трехчлены нельзя представить в виде произведения двух двучленов:

а) $2x^2 + 5x + 6$; б) $2x^2 + 5$; в) $-x^2 + x - 3$.

П **389** Прочитайте высказывания. Как они называются? Сформулируйте высказывания, обратные данным. Определите истинность первоначальных высказываний и обратных к ним. Для ложных высказываний постройте отрицания:

а) $(-4 + 1 = -3$ и $-4 \cdot 1 = -4) \Rightarrow$ (числа -4 и 1 являются корнями квадратного уравнения $x^2 + 3x - 4 = 0$);

б) $(x^2 + 3x + 2 = 0) \Rightarrow (x = -2$ или $x = -1)$;

в) $(4 + 3 = 7$ и $4 \cdot 3 = 12) \Rightarrow$ (числа 4 и 3 являются корнями квадратного уравнения $x^2 + 7x + 12 = 0$);

г) $(x^2 + 6x - 135 = 0) \Rightarrow (x = -15$ или $x = 9)$;

д) $(x^2 - 3x + 10 = 0) \Rightarrow (x = 5)$;

е) $(-5 + (-3) = -8$ и $-5 \cdot (-3) = 15) \Rightarrow$ (числа -5 и -3 являются корнями квадратного уравнения $0{,}2x^2 + 8x + 15 = 0$).

390 Упростите выражения:

а) $\sqrt{7+2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{7-2\sqrt{6}}$; б) $2\sqrt{3}\left(\sqrt{12}+\sqrt{27}\right)$.

391 Определите без калькулятора, между какими целыми числами лежит число

а) $\sqrt{55}$; б) $-\sqrt{190}$; в) $-\sqrt{19 \cdot 21}$; г) $\sqrt{30 \cdot 40}$.

Д **392** Разложите на множители квадратные трехчлены:

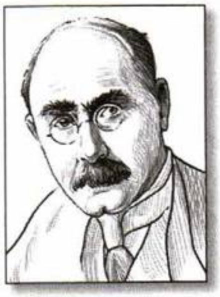
а) $x^2 + 3x - 10$; б) $2x^2 - 7$; в) $3x^2 - 5x - 2$;

г) $-3x^2 + 7x - 4$; д) $2x^2 + 3x - 4$.

393 Упростите выражение $\sqrt{19+8\sqrt{3}} \cdot (4-\sqrt{3})$.

С **394*** Квадратный трехчлен $x^2 + ax + b$ имеет целые корни, по модулю большие 2. Докажите, что число $a + b + 1$ составное.

6. Квадратные уравнения с параметром



Есть у меня шестерка слуг, проворных, удалых.
И все, что вижу я вокруг, – все знаю я от них.
Они по знаку моему являются в нужде.
Зовут их: Как и Почему, Кто, Что, Когда и Где.

Д. Р. Киплинг (1865–1936),
английский писатель, поэт

Каждый раз при знакомстве с новым видом уравнений – линейных, квадратных – мы заменяли их числовые коэффициенты буквами и рассматривали уравнение в общем виде. Уравнения, где некоторые коэффициенты заданы не конкретным числом, а буквой или буквенным выражением, встречаются и при решении практических задач. Поэтому им дали специальное название – *уравнения с параметрами*. С решением некоторых видов таких уравнений мы познакомимся в данном пункте.

***Определение* 1.** Уравнение, в котором некоторые коэффициенты заданы буквами или буквенными выражениями, называется **уравнением с параметрами**.

Так, уравнение $2ax - 5 = 0$ является линейным уравнением с параметром a, а уравнение $bx^2 + x - 6 = 0$ – квадратным уравнением с параметром b (при условии, что a и b не равны нулю).

Уравнение с параметром в зависимости от значения параметра может изменять свой вид, количество решений и, естественно, сами решения. Например, уравнение $bx^2 + x - 6 = 0$ при $b = 0$ становится линейным уравнением $x - 6 = 0$ и имеет единственное решение $x = 6$. При $b = 1$ оно преобразуется в уравнение $x^2 + x - 6 = 0$ с двумя корнями $x_1 = 2$ и $x_2 = -3$. А при $b = -1$ это же уравнение принимает вид $-x^2 + x - 6 = 0$ с отрицательным дискриминантом $D = 1 - 4(-1)(-6) = -23 < 0$, а значит, не имеет корней.

В уравнениях с параметрами, которые встречаются в практических задачах физики, химии, биологии, обычно приходится исследовать, как уравнение зависит от значения параметра, и находить решения для всех возможных случаев. Но учиться их решать важно не только тем, кому они потребуются в будущей профессии, а каждому, поскольку, как и многие другие математические задания, они развивают умение понимать информацию, анализировать и систематизировать ее, что в современном мире нужно всем без исключения людям.

Вначале рассмотрим более простые виды заданий, в которых требуется выяснить, при каких значениях параметров уравнение обладает тем или иным свойством. Например, уравнение имеет одно решение, не имеет решений и т. д. В таких заданиях мы должны четко указывать, при каком значении параметра требуемое условие выполняется.

Пример 1.
При каких значениях параметра k уравнение $x^2 - 2x + k = 0$ не имеет корней?

Решение:

Так как при старшем коэффициенте данного квадратного уравнения параметр не содержится, то при любом значении параметра k оно будет оставаться квадратным.

Квадратное уравнение не имеет корней, если его дискриминант меньше нуля. Поэтому определим дискриминант D и найдем значения k, при которых $D < 0$.

$D = (-2)^2 - 4k = 4 - 4k$, значит:

$$D < 0 \Leftrightarrow 4 - 4k < 0 \Leftrightarrow -4k < -4 \Leftrightarrow k > 1.$$

Ответ: уравнение не имеет корней при $k \in (1; +\infty)$.

Пример 2.

При каких значениях параметра a уравнение $ax^2 - (a + 1)x + 2a - 1 = 0$ имеет ровно один корень?

Решение:

Данное уравнение при $a = 0$ является линейным, а при $a \neq 0$ – квадратным. Поскольку и линейное, и квадратное уравнения могут иметь один корень, то нам нужно исследовать оба случая.

1) Если $a = 0$, то уравнение преобразуется в линейное уравнение $-x - 1 = 0$. Оно имеет один корень. Значит, при $a = 0$ требуемое условие выполняется.

2) Если $a \neq 0$, то уравнение является квадратным (по определению квадратного уравнения). Квадратное уравнение может иметь один корень, если его дискриминант равен нулю. Исследуем этот случай:

$$D = (a + 1)^2 - 4a(2a - 1) = a^2 + 2a + 1 - 8a^2 + 4a = -7a^2 + 6a + 1.$$

$$D = 0 \Leftrightarrow -7a^2 + 6a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \text{ и } a = -\frac{1}{7}.$$

Ответ: уравнение имеет единственный корень при $a = 0$, $a = 1$, $a = -\frac{1}{7}$.

Пример 3.

При каких значениях параметра a уравнение
$(a^2 - 3a + 2)\,x^2 + (a^2 - 1)\,x + (9a^2 - 8a - 1) = 0$ имеет более двух корней?

Решение:

Известно, что квадратное уравнение не может иметь более двух корней, а линейное уравнение имеет более двух корней только в случае, когда оно приводится к виду $0x = 0$. Поэтому найдем значения a, при которых данное уравнение становится линейным (то есть коэффициент при x^2 равен 0), и исследуем его:

$$a^2 - 3a + 2 = 0 \Leftrightarrow a_1 = 2 \text{ и } a_2 = 1.$$

Если $a = 2$, то коэффициент при x полученного линейного уравнения отличен от нуля, и, следовательно, уравнение имеет один корень. Значит, $a = 2$ не подходит.

Если $a = 1$, то исходное уравнение превращается в уравнение $0x = 0$, которое имеет бесконечно много (а значит, более двух) корней.

Ответ: уравнение имеет более двух корней при $a = 1$.

Пример 4.

При каких значениях параметра a уравнение $7x^2 - 4x + a = 0$ имеет общий корень с уравнением $x^2 - 2x - 8 = 0$?

Решение:

По теореме, обратной теореме Виета, уравнение $x^2 - 2x - 8 = 0$ имеет корни $x_1 = 4$ и $x_2 = -2$. Найдем значения a, при которых числа 4 и −2 являются также корнями данного уравнения $7x^2 - 4x + a = 0$.

Если $x = 4$, то $7 \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 + a = 0$, то есть $a = -96$.

Если $x = -2$, то $7 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + a = 0$, то есть $a = -36$.

Ответ: $a = -96$ или $a = -36$.

* * *

Более общая задача при решении уравнений с параметрами звучит так: *решить уравнение*.

***Определение* 2. Решить уравнение с неизвестным x и параметром a** – это значит, для всех возможных допустимых значений параметра a найти множество значений x, удовлетворяющих этому уравнению.

Из этого определения следует, что каждое уравнение с параметром «порождает» целое семейство обычных уравнений. И, решая одно уравнение с параметром, мы тем самым решаем все «спрятанные» в нем уравнения определенного вида. Поэтому если хотя бы одно из допустимых значений a останется неисследованным, признать такое решение верным нельзя.

Выведем сначала общий алгоритм решения *линейных уравнений с параметром*. Для этого рассмотрим вначале несколько конкретных примеров.

Пример 5.

Решить уравнение $2x - a = 0$ с параметром a.

Решение:

Параметр – это некоторое число, конкретное значение которого в задании не указано. Поэтому мы можем выполнить следующую цепочку преобразований, равносильных при любом значении a:

$$2x - a = 0 \Leftrightarrow 2x = a \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}.$$

Значит, при любом значении параметра a корень уравнения равен $\frac{a}{2}$.

Определение решения уравнения с параметром требует указать в ответе не только полученный корень, но и множество значений параметра a, при которых уравнение имеет этот корень.

Ответ: при любом $a \in \boldsymbol{R}$ уравнение имеет единственный корень $x = \frac{a}{2}$.

Пример 6.

Решить уравнение $(a - 2)\,x = 0$ с параметром a.

Решение:

В данном уравнении буквенным выражением является коэффициент при x, от которого зависит количество решений. Поэтому начнем решение с нахождения «особенных» значений параметров, при которых уравнение либо вообще не имеет корней, либо имеет бесконечное множество корней:

$$a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2.$$

Таким образом, выделяются два случая: $a = 2$ и $a \neq 2$.

1) Если $a = 2$, то уравнение принимает вид $0x = 0$. Тогда x – любое число.

2) Если $a \neq 2$, то обе части уравнения можно разделить на число $a - 2 \neq 0$:

$$(a-2)x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{0}{a-2} \quad \Leftrightarrow \quad x=0.$$

Ответ: при $a \neq 2$ уравнение имеет корень $x = 0$, при $a = 2$ корнем уравнения является любое число.

Заметим, что при необходимости решение линейного уравнения с параметрами начинают с приведения уравнения к удобному для исследования виду $kx + b = 0$, где k и b – некоторые числа или выражения с параметром. В рассмотренных примерах в этом не было необходимости, так как уравнения сразу были даны в указанном виде.

Итак,

Алгоритм решения линейного уравнения с параметром

1. Представить, если нужно, уравнение в виде $kx + b = 0$, где k и b – некоторые числа или выражения с параметром.

2. Если есть «особенные» значения параметра (когда коэффициент при x равен 0), найти их и решить уравнение при этих значениях параметра.

3. Решить уравнение для оставшихся значений параметра.

4. В ответе указать все возможные значения параметра и соответствующие им решения.

Аналогичным образом исследуем решение *квадратных уравнений с параметрами*.

Пример 7.

Решить уравнение $dx^2 = 6x - 3$ с параметром d.

Решение:

Запишем уравнение в виде $dx^2 - 6x + 3 = 0$. «Особенным» значением параметра в данном случае является нулевое значение коэффициента d при x^2, от которого зависит вид уравнения. Рассмотрим два случая: $d = 0$ и $d \neq 0$.

1) Если $d = 0$, то уравнение линейное: $-6x + 3 = 0$. Оно имеет один корень $x = 0,5$.

2) Если $d \neq 0$, то уравнение квадратное, количество его корней определяется знаком дискриминанта $D_1 = 9 - d \cdot 3 = 9 - 3d$. Рассмотрим отдельно случаи $D_1 > 0$, $D_1 = 0$ и $D_1 < 0$, при которых уравнение имеет, соответственно, два корня, один корень и не имеет корней.

- $D_1 > 0 \Leftrightarrow 9 - 3d > 0 \Leftrightarrow d < 3$ (при этом $d \neq 0$).

Значит, при $d \in (-\infty; 0) \cup (0; 3)$ уравнение имеет два корня $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 3d}}{d}$.

- $D_1 = 0 \Leftrightarrow 9 - 3d = 0 \Leftrightarrow d = 3$.

Значит, при $d = 3$ уравнение имеет один корень $x = \dfrac{3}{d} = 1$.

- $D_1 < 0 \Leftrightarrow 9 - 3d < 0 \Leftrightarrow d > 3$.

Значит, при $d \in (3; +\infty)$ уравнение не имеет корней.

Ответ: При $d \in (3; +\infty)$ корней нет; при $d = 3$ корень $x = 1$; при $d = 0$ корень $x = 0,5$; при $d \in (-\infty; 0) \cup (0; 3)$ два корня $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 3d}}{d}$.

Итак,

Алгоритм решения квадратного[2] уравнения с параметром

1. Представить, если нужно, уравнение в виде $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b и c – некоторые числа или выражения с параметром.

2. Если есть «особенные» значения параметра (когда коэффициент при x^2 равен 0), найти их и решить уравнение при этих значениях параметра.

3. Для оставшихся значений параметра определить дискриминант.

4. Найти значения параметра, при которых:
- $D > 0$, найти два корня уравнения при этих значениях параметра;
- $D = 0$, найти один корень уравнения при этих значениях параметра;
- $D < 0$, записать, что при данных значениях параметра корней нет.

5. В ответе указать все возможные значения параметра и соответствующие им решения.

---

[2] Строго говоря, оно является уравнением с параметром не выше второй степени.

К **395** Разбейте уравнения на две группы:

а) $3x^2 + x + p = 0$; в) $7x^2 + 0{,}1\,x - 10 = 0$; д) $2x^2 + sx + 2s = 0$;

б) $-4x^2 + x - 9 = 0$; г) $5x^2 + 12x + 1 = 0$; е) $rx^2 + rx + (r + 1) = 0$.

Какое название вы предложили бы для уравнений, в которых коэффициенты заданы буквенными выражениями? Сравните свой вариант с общепринятым на стр. 100.

396 Прочитайте данные уравнения и ответьте на следующие вопросы:

а) $x^2 - 2x + 1 = 0$; б) $x^2 - 2x + 0{,}75 = 0$; в) $x^2 - 2x + 3 = 0$; г) $x^2 - 2x + k = 0$.

1) Чем отличаются данные уравнения? Какое из этих уравнений является уравнением с параметром?

2) Сколько решений корней имеет каждое из этих уравнений. Как вы сформулировали ответ в последнем случае? Почему?

3) При каких значениях параметра k уравнение $x^2 - 2x + k = 0$ не имеет корней? Сопоставьте свой ответ с образцом, данным в учебнике на стр. 101.

4) Найдите значения параметра, при котором уравнение $x^2 - 2x + k = 0$ имеет ровно один корень. Найдите значения параметра, при котором это уравнение имеет два корня.

5) Сделайте вывод о нахождении значений параметра, при котором квадратное уравнение с параметром имеет ровно один корень, имеет два корня, не имеет корней.

397 При каких значениях параметра a уравнение $x^2 - 2ax + a(1 + a) = 0$:

а) имеет два различных корня;

б) имеет ровно один корень;

в) не имеет корней?

398 При каких значениях параметра a уравнение $x^2 + ax + 1 = 0$ имеет единственный корень? Чему он равен?

399 При каких значениях параметра a уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$ и $x^2 + x + a = 0$ имеют хотя бы один общий корень?

400 При каких значениях параметра a уравнение $x^2 - 12x + a = 0$ имеет два действительных корня, один из которых больше другого на $2\sqrt{5}$.

401 Найдите все значения параметра a, при которых один из корней уравнения $ax^2 + (a + 3)x - 3a = 0$ больше 1, а другой меньше -1.

402 При каких значениях параметра a корни уравнения $x^2 + (1 - a)x - a = 0$ будут два различных корня одного знака, разных знаков?

403 Один из корней уравнения $2x^2 + x - a = 0$ равен 2. Чему равно a?

404 Определите, при каком целом k один из корней уравнения $4x^2 - (3k + 2)x + (k^2 - 1) = 0$ в три раза больше другого.

405 Решите уравнения с параметром a:

а) $x^2 + 4x + 2a = 0$; б) $3x^2 - ax - 1 = 0$; в) $ax^2 + 2x - 3 = 0$.

П **406** Вычеркните буквы, соответствующие квадратным трехчленам, которые нельзя представить в виде произведения двух двучленов. Из оставшихся букв составьте слово. Что обозначает это понятие?

Р	$x^2+12x+36$	**П**	x^2-2x-3	**Г**	$x^2-8x+12$
Л	x^2+x-30	**Р**	$5x^2+3x+1$	**А**	$3x^2-6x+7$
Б	x^2-7x	**И**	x^2-6x+9	**Е**	$-2x+15-x^2$
О	$2x^2-24x$	**А**	$2x^2-2x-1$	**А**	$5x^2+7+3x$

407 Запишите периодические десятичные дроби в виде обыкновенной:
а) $-5,(3)$; б) $1,0(22)$.

408 Определите, какое слово или словосочетание («необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно») надо поставить вместо многоточия, чтобы высказывание стало истинным:

а) Для того чтобы сумма цифр натурального числа n делилась на 3..., чтобы число n делилось на 3.

б) Для того чтобы число n делилось на 5..., чтобы число n оканчивалось на 5.

в) Для того чтобы натуральное число n делилось на 12 и на 9..., чтобы число n делилось на 3.

Д **409** При каких значениях параметра a уравнение $x^2-2ax+a(a+3)=0$:

а) имеет два различных корня; б) имеет ровно один корень; в) не имеет корней?

410 При каких значениях параметра a уравнение $(1-a)x^2-4ax+4(1-a)=0$
а) не имеет корней; б) имеет не более одного корня; в) имеет не менее одного корня?

411 При каких значениях параметра a уравнения $x^2+x+a=0$ и $x^2+x-a=0$ имеют одинаковое число корней?

412 При каких значениях параметра a уравнение $x^2-4x+a=0$ имеет:

а) хотя бы один действительный корень;

б) два различных действительных корня одного знака;

в) два действительных корня разных знаков;

г) один корень нулевой, а другой – положительный;

д) один корень нулевой, а другой – отрицательный?

413 Решите уравнения с параметром k:

а) $-x^2-4x+4k=0$; б) $5x^2-2kx-1=0$; в) $kx^2+8x-3=0$.

414 Определите, какое слово или словосочетание («необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно») надо поставить вместо многоточия, чтобы высказывание стало истинным:

а) Для того чтобы число n делилось на 2..., чтобы число n оканчивалось на 2.

б) Для того чтобы натуральное число n делилось на 15 ..., чтобы число n делилось на 3.

в) Для того чтобы квадратный трехчлен раскладывался на множители ..., чтобы он имел два корня.

г) Для того чтобы квадратный трехчлен раскладывался на множители ..., чтобы он имел хотя бы один корень.

С **415*** Докажите, что при любых a и b уравнение $(a^2 - b^2)x^2 + 2(a^3 - b^3)x + (a^4 - b^4) = 0$ имеет решение.

416* При каких значениях параметра a один из корней уравнения $x^2 - \frac{15}{4}x + a^3 = 0$ является квадратом другого?

7. Задачи, сводящиеся к решению квадратных уравнений

Вместо того чтобы «пробовать и ошибаться» на реальных объектах, люди предпочитают делать это на математических моделях. Построение таких моделей, их анализ и вывод рекомендаций – одна из важнейших задач прикладной математики.

Е.С. Вентцель (1907–2002),
советский математик, автор учебников

К необходимости изучения квадратных уравнений нас привели практические задачи. Теперь, когда алгоритм решения квадратных уравнений найден, этап работы с полученной при решении задачи математической моделью сводится к применению формул корней квадратного уравнения и является, как говорится, «делом техники».

Однако некоторые другие этапы решения задач, сводящихся к квадратным уравнениям, приобретают новые черты, которые нам и надо теперь установить.

Рассмотрим вначале несколько конкретных примеров.

Задача 1

Площадь прямоугольника составляет 10 дм². Найдите длины сторон прямоугольника, если одна из них на 15 см больше другой.

Решение:

1. Определим, какие величины известны и какие надо найти.

В задаче известны взаимосвязи между двумя неравными сторонами прямоугольника, известна его площадь. Требуется найти длины сторон прямоугольника.

2. Проверим соответствие единиц измерения величин.

Единицы измерения не согласованы. Выразим площадь в квадратных сантиметрах: 10 дм² = 1000 см².

3. Выберем неизвестные величины и введем для них буквенные обозначения.

Обозначим длину меньшей стороны прямоугольника x см.

4. Определим множество значений, которые могут принимать неизвестные величины.

Так как x – длина стороны (в сантиметрах), то $x > 0$.

5. Установим взаимосвязи между величинами.

По условию длина одной стороны на 15 см больше другой, значит, ее длина составляет $(x + 15)$ см. Площадь прямоугольника равна $x\,(x + 15)$ см².

6. Составим уравнение или неравенство (одно или несколько) и обоснуем их.

Площадь прямоугольника равна $x(x + 15)$, что по условию составляет 1000 см^2, значит:

$$x(x + 15) = 1000.$$

Запишем все установленные соотношения и зафиксируем искомую величину:

$$\begin{cases} x(x+15)=1000 \\ x>0 \end{cases} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x-? \\ x+15-? \end{array}}$$

7. Найдем все решения, удовлетворяющие построенной модели.

Искомое значение x должно удовлетворять каждому из составленных соотношений. Сначала решим уравнение:

$$x\,(x + 15) = 1000 \Leftrightarrow x^2 + 15x - 1000 = 0.$$

Это квадратное уравнение имеет дискриминант $D = 15^2 + 4000 = 4225 = 65^2 > 0$, поэтому оно имеет два корня: $x_1 = \dfrac{-15+65}{2} = 25$, $x_2 = \dfrac{-15-65}{2} = -40$.

Так как по условию $x > 0$, то отрицательный корень не подходит, и $x = 25$. Значит, одна сторона прямоугольника равна 25 см, а вторая – $25 + 15 = 40$ см.

8. Проверим соответствие полученного ответа вопросу задачи.

Найденные ответы соответствуют вопросу задачи.

9. Убедимся, что полученные решения соответствуют смыслу задачи.

Полученные ответы являются положительными числами, они соответствует смыслу задачи.

Ответ: стороны прямоугольника 25 см и 40 см.

Задача 2

Задумано натуральное число. Если это число увеличить в 10 раз, то полученный результат станет на 9 больше квадрата задуманного числа. Какое число могли задумать?

Решение:

В задаче известны взаимосвязи между задуманным числом и его квадратом. Требуется найти задуманное число.

Обозначим задуманное число x. По условию, $x \in N$. Результат увеличения задуманного числа в 10 раз запишем как $10x$, а квадрат задуманного числа как x^2.

По условию, $10\,x$ на 9 больше, чем x^2, значит: $10x = x^2 + 9$.

Запишем все установленные соотношения и зафиксируем искомую величину:

$$\begin{cases} 10x = x^2 + 9 \\ x \in N \end{cases} \longrightarrow \boxed{x-?}$$

Искомое значение x должно удовлетворять каждому из составленных соотношений. Сначала решим уравнение:

$$10x = x^2 + 9 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 9 = 0.$$

По теореме, обратной теореме Виета, $x_1 = 1$ и $x_2 = 9$.

Оба корня являются натуральными числами, то есть удовлетворяют условию $x \in N$. Каждое из них соответствует вопросу и смыслу задачи. Значит, задача имеет два решения.

Ответ: задумали число 1 или число 9.

Рассмотренные примеры показывают, что математической модели задачи могут соответствовать как оба корня квадратного уравнения, так и один (и даже ни одного). Поэтому при решении задач, сводящихся к квадратному уравнению, следует особое внимание уделять определению, во-первых, множества значений, которые может принимать неизвестная величина, а, во-вторых – проверке каждого корня на принадлежность этому множеству. Иначе ответ задачи будет определен неверно.

Проверка решений на соответствие смыслу задачи, которая проводится на последнем этапе решения, помогает выявить и устранить возможные ошибки. Так, если бы в задаче 1 по какой-либо причине (ошибка при построении математической модели, при проверке полученных корней на соответствие второму соотношению модели и др.) корень (-40) не был бы отсеян, то мы бы отбросили его на последнем шаге, так как отрицательное число не может выражать длину стороны прямоугольника.

Итак,

при решении задач, сводящихся к квадратным уравнениям, следует уделять особое внимание:

1) определению множества значений, которые может принимать неизвестная величина x;

2) проверке полученных корней уравнения x_1 и x_2 на принадлежность этому множеству.

Если один или оба корня квадратного уравнения не принадлежат множеству допустимых значений x, то они являются *посторонними* и не рассматриваются в ходе дальнейшего решения задачи.

Если же оба корня квадратного уравнения принадлежат множеству допустимых значений x, то оба корня рассматриваются в ходе дальнейшего решения задачи.

Для контроля на последнем шаге решения задачи следует убедиться, что полученные решения соответствуют смыслу задачи.

* * *

Рассмотрим пример задачи, математическая модель которой хотя и не содержит квадратного уравнения, но ее можно свести к квадратному уравнению.

Задача 3.

Катер прошел 18 км по течению реки, а затем 20 км против течения, затратив на весь путь 2 часа. Найти скорость течения реки, если собственная скорость катера 20 км/ч.

Решение:

В задаче известна собственная скорость катера, путь по течению и путь против течения реки, а также общее время движения. Нужно найти скорость течения реки.

Обозначим скорость течения реки x км/ч. Скорость течения реки положительна, но меньше 20 км/ч (иначе катер не смог бы двигаться против течения), значит, $0 < x < 20$.

Скорость катера при движении по течению равна $(20 + x)$ км/ч, против течения $(20 - x)$ км/ч. Тогда на движение по течению реки катер затратит $\frac{18}{20+x}$ ч, а против течения $\frac{20}{20-x}$ ч. По условию задачи, общее время движения катера равно 2 ч, то есть $\frac{18}{20+x}+\frac{20}{20-x}=2$.

Составим математическую модель:

$$\begin{cases} \dfrac{18}{20+x}+\dfrac{20}{20-x}=2 \\ 0<x<20 \end{cases} \longrightarrow \boxed{x-?}$$

Решим уравнение. Вначале заметим, что выражение $(20 + x)(20 - x) \neq 0$, так как $0 < x < 20$.

По правилу равносильных преобразований обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число (выражение), отличное от нуля. В нашем случае, чтобы избавиться от дробных выражений, мы можем умножить обе части уравнения на $(20 + x)(20 - x) = 400 - x^2 \neq 0$.

$$\frac{18}{20+x}+\frac{20}{20-x}=2 \iff 18(20-x)+20(20+x)=2(400-x^2).$$

Разделим обе части полученного уравнения на 2, раскроем скобки и выполним дальнейшие равносильные преобразования:

$$9(20 - x) + 10(20 + x) = 400 - x^2 \Leftrightarrow 180 - 9x + 200 + 10x = 400 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 20 = 0.$$

Дискриминант этого квадратного уравнения $D = 1^2 + 4 \cdot 20 = 81 > 0$, поэтому оно имеет два корня: $x_1 = \frac{-1+\sqrt{81}}{2} = 4$; $x_2 = \frac{-1-\sqrt{81}}{2} = -5$.

Так как $0 < x < 20$, то математической модели удовлетворяет только первый корень.

Найденный ответ соответствует вопросу задачи. Скорость течения реки 4 км/ч не противоречит реальному смыслу задачи.

Ответ: 4 км/ч.

К **417** Решите задачи и ответьте на вопросы к ним:

«Одно действительное число в 4 раза больше другого, а их сумма равна 221. Найдите эти числа».

«Одно действительное число на 4 больше другого, а их произведение равно 221. Найдите эти числа».

«Одно положительное число на 4 больше другого, а их произведение равно 221. Найдите эти числа».

1) Какую из построенных моделей можно считать «лишней»? Почему?

2) Сколько корней получено в линейном уравнении, в квадратном уравнении? Все ли из полученных корней соответствовали условию задачи?

3) На какие этапы решения задач, сводящихся к квадратным уравнениям, следует обращать особое внимание?

Сравните свои выводы с особыми замечаниями к решению задач, сводящихся к квадратным уравнениям на стр. 108.

418 Одна из сторон прямоугольника на 9 см меньше другой. Найдите стороны этого прямоугольника, если его площадь равна 630 см^2.

419 Известно, что один из катетов прямоугольного треугольника на 4 см меньше другого, а его гипотенуза равна 20 см. Найдите длины катетов.

420 Решите задачу знаменитого индийского математика XII в. Бхаскары:

«Обезьянок резвых стая,
Всласть наевшись, развлекалась.
Их в квадрате часть восьмая
На поляне забавлялась.

А двенадцать по лианам
Стали прыгать, повисая...
Сколько ж было обезьянок,
Ты скажи мне, в этой стае?»

421 Найдите два последовательных числа, кратных трем, если их произведение равно 648.

422 Футболист послал мяч вертикально вверх. Пока мяч не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой $h = -5t^2 + 16t + 1$ (h – высота в метрах, t – время в секундах, прошедшее с момента удара). Найдите, сколько секунд мяч находился на высоте не менее 4 метров.

423 Зависимость объема спроса q (тыс. руб.) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задается формулой $q = 85 - 5p$. Выручка предприятия за месяц, r (в тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = qp$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 300 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

424 Два подъемных крана, работая вместе, разгрузили баржу за два часа. За какое время может разгрузить баржу каждый кран в отдельности, если один из них тратит на это на три часа меньше другого?

425 Катер спустился по течению реки на расстояние 56 километров и сразу вернулся назад. На это ему потребовалось 7 часов. Найти скорость движения катера в стоячей воде, если известно, что вода в реке движется со скоростью 3 км/ч.

П **426** Проверьте, истинно или ложно утверждение:

а) Два квадратных трехчлена $x^2 - a$ и $x^2 + 5x$ имеют общий корень как при $a = 0$, так и при $a = 25$.

б) Квадратное уравнение $2x^2 + ax + 8 = 0$ имеет один корень при $a = 8$.

в) Существует два рациональных значения параметра a, при которых уравнение $ax^2 + ax + a + 1 = 0$ имеет один корень.

г) Уравнение $ax^2 + (3 + a)x - a - 3 = 0$ имеет один корень при $a \in \{0; -0{,}6; -3\}$.

д) Квадратное уравнение $x^2 + ax - a - 1 = 0$ имеет два корня при всех действительных значениях a.

е) Квадратное уравнение $x^2 + ax - 2 = 0$ не имеет корней при всех действительных значениях a.

427 Выполните действия:

а) $\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$; б) $\frac{1}{12}+\frac{1}{4}$; в) $\frac{5}{9}-\frac{7}{12}$; г) $\frac{12}{33}-\frac{5}{44}$; д) $\left(\frac{29}{30}+1\frac{11}{42}-2\frac{31}{35}\right)$.

428 Выполните действия:

а) $\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{5}$; б) $\frac{1}{12}:\frac{1}{4}$; в) $\frac{5}{33}\cdot\frac{11}{15}$; г) $\frac{12}{35}:8$; д) $12\frac{4}{5}\cdot3\frac{1}{8}:\frac{1}{5}$.

429 Расположите числовые выражения в порядке возрастания их значений:

$-\frac{5}{6}\cdot(-0{,}2)$; $-\frac{1}{4}:\frac{3}{8}$; $0{,}6-\frac{11}{15}$.

430 Вычислите рациональным способом:

а) $12\frac{3}{7}:\left(1\frac{8}{15}+0{,}25-3\frac{1}{30}-1\frac{3}{4}\right)$; б) $\left(3\frac{13}{15}-12\frac{3}{20}-5\frac{4}{45}-0{,}85\right)\cdot3$.

431 Найдите значение выражения:

а) $\frac{13}{15}\cdot\frac{9}{26}-3\frac{3}{10}+\left(3\frac{1}{4}-3\frac{1}{20}\right):\frac{1}{5}$; б) $\dfrac{3\frac{2}{5}\cdot5-14}{\left(\frac{1}{8}-1\frac{1}{4}\right):\frac{3}{4}+2\frac{1}{4}}$.

432 Найдите значение выражения:

а) $a^2 - \dfrac{a(a-2)^2 + (2a-1)^2}{a+1}$ при $a = 2\,000$.

б) $\dfrac{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{x + \sqrt{xy} + y} + \dfrac{x-y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + 1$ при $x = 1\,000\,000$ и $y = 1001$.

Д **433** Сумма квадратов двух последовательных натуральных чисел больше произведения этих чисел на 43. Найдите эти числа.

434 Если одну из сторон квадрата увеличить на 1 дм, а другую на 6 дм, то получится прямоугольник, площадь которого в 4 раза больше площади квадрата. Найдите длину стороны квадрата.

435 Длины сторон прямоугольного треугольника являются последовательными четными числами. Найдите площадь треугольника.

436 При розыгрыше чемпионата города по футболу было проведено 28 игр. Сколько команд участвовало в розыгрыше, если каждая команда сыграла с каждой из остальных команд ровно по одному разу?

437 Из города A в город B автомобиль доехал за 5 ч. В обратный путь он отправился с той же скоростью. Проехав 60 км, он снизил скорость на 20 км/ч. В итоге на обратный путь он затратил на 2 ч больше. Какое расстояние между городами A и B?

438 Один из заводов выполняет некоторый заказ на восемь дней быстрее, чем другой. За какое время может выполнить заказ каждый завод, работая отдельно, если известно, что при совместной работе за 24 дня они выполнили заказ в четыре раза больший?

439 Выполните действия:

а) $\dfrac{1}{7} + \dfrac{2}{9}$; в) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{15}$; д) $\dfrac{1}{42} \cdot 7$;

б) $\dfrac{23}{42} - \dfrac{8}{63}$; г) $\dfrac{5}{9} : \dfrac{10}{63}$; е) $\dfrac{8}{35} : 20$.

440 Расположите числовые выражения в порядке возрастания их значений:

$\dfrac{5}{18} \cdot (-0{,}6)$; $-\dfrac{3}{8} : \dfrac{5}{6}$; $0{,}2 - \dfrac{8}{15}$.

441 Вычислите рациональным способом:

а) $16\dfrac{8}{15} : \left(1\dfrac{11}{18} - 0{,}3 - 4\dfrac{1}{9} - 5\dfrac{1}{5}\right)$;

б) $\left(1\dfrac{23}{45} + 16\dfrac{7}{20} - 6\dfrac{1}{15} + 0{,}65\right) \cdot \dfrac{1}{3}$.

С **442*** Найдите три последовательных натуральных числа, если известно, что их сумма в 5 раз меньше их произведения.

443* Произведение четырех последовательных нечетных положительных чисел равно 9009. Найдите эти числа.

Экспресс-тест № 5

Примерное время выполнения – 35 минут

Часть А

№ 1

№ 1. Корнями какого уравнения являются числа −5; 0; 5?

А) $x^2 - 25 = 0$; В) $x^4 - 25x^2 = 0$;

Б) $5x^3 - 25x = 0$; Г) $x(x^2 - 10x + 25) = 0$.

№ 2

№ 2. Решите уравнение $-(x-3)^2 + 1 = x - 2$.

А) −6; 2; Б) −4; 3; В) 2; 4; Г) 2; 3.

№ 3			
1	2	3	4

№ 3. Установите соответствие между квадратными трехчленами и их разложениями на множители:

1) $x^2 + 8x - 9$; 3) $-2x^2 - x + 1$;

2) $-2x^2 + 3x - 1$; 4) $2x^2 + 5x - 3$.

А) $(1 - 2x)(x + 1)$; В) $(2x - 1)(x + 3)$;

Б) $(x + 9)(x - 1)$; Г) $(1 - 2x)(x - 1)$.

№ 4

№ 4. Найдите корни уравнения $x^2 - 2\sqrt{2}x - 3 = 0$.

А) $\sqrt{2} \pm \sqrt{5}$; Б) $\sqrt{2} \pm \sqrt{10}$; В) $\sqrt{7}$; Г) $\varnothing$.

№ 5

№ 5. Одна из сторон прямоугольника на 18 дм больше другой стороны. Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 403 дм^2.

А) 44 дм; Б) 62 дм; В) 98 дм; Г) 88 дм.

Часть В

№ 6

№ 6. При каких значениях b уравнение $x^2 - bx + 3 = 0$ имеет единственное решение?

А) 12; В) $\varnothing$;

Б) $-4\sqrt{3}$; $4\sqrt{3}$; Г) $-2\sqrt{3}$; $2\sqrt{3}$.

№ 7

№ 7. Решите уравнение: $(x^2 - 5x)^2 + 6(x^2 - 5x) = 72$. Какому числовому промежутку принадлежит сумма корней уравнения

А) $[-6; -1]$; В) $(-1; \sqrt{25}]$;

Б) $[-1; \sqrt{24}]$; Г) $[6; 7]$?

Часть С

(ход решения и ответ записывается на отдельном листе)

№ 8. Решите уравнение: $(x - 1)^4 - 13x^2 + 26x + 23 = 0$.

№ 9. Пусть x_1 и x_2 корни уравнения $x^2 - 15x + 56 = 0$. Не решая уравнение, найдите значение выражения:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}.$$

Ответы и решения к тесту:

№ 1	№ 2	№ 3				№ 4	№ 5	№ 6	№ 7
		1	*2*	*3*	*4*				
В	*Г*	*Б*	*Г*	*А*	*В*	*А*	*Г*	*Г*	*В*

№ 8

$$(x-1)^4 - 13x^2 + 26x + 23 = 0$$
$$(x-1)^4 - 13x^2 + 26x - 13 + 13 + 23 = 0$$
$$(x-1)^4 - 13\,(x^2 - 2x + 1) + 36 = 0$$
$$(x-1)^4 - 13\,(x-1)^2 + 36 = 0$$

Пусть $(x-1)^2 = a$, тогда

$$a^2 - 13a + 36 = 0$$

По теореме, обратной теореме Виета:

$a_1 = 4$; $a_2 = 9$, значит:

$(x-1)^2 = 4$ или $(x-1)^2 = 9$

$x - 1 = \pm 2$ или $x - 1 = \pm 3$

$x_1 = 3$; $x_2 = -1$; $x_3 = 4$; $x_4 = -2$

Ответ: $\{-2; -1; 3; 4\}$.

№ 9

По теореме Виета $x_1 + x_2 = 15$ и $x_1 \cdot x_2 = 56$.

Преобразуем выражение, выделив в его записи сумму и произведение корней:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2}$$

$$\frac{15^2 - 2\cdot 56}{56} = \frac{113}{56} = 2\frac{1}{56}$$

Ответ: $2\frac{1}{56}$.

Шкала успешности:

10–13 баллов – *отлично*
7–9 баллов – *хорошо*
5–6 баллов – *удовлетворительно*

§ 2. Квадратичная функция

1. Функции $y = ax^2$; $y = ax^2 + h$; $y = a(x - d)^2$ и их графики

...природа формулирует свои законы языком математики.

Галилео Галилей (1564–1642),
итальянский физик, механик, астроном,
философ и математик

В предыдущей главе, обобщая зависимость между площадью квадрата и его стороной, мы получили функцию $y = x^2$, графиком которой является парабола. Оказывается, подобной кривой описываются и многие другие зависимости между величинами окружающего мира. В данном пункте мы выявим некоторые такие зависимости, исследуем их свойства и составим описывающие их формулы.

Проанализируем, например, как зависит площадь круга S от длины его радиуса r. Нам уже известна формула $S = \pi r^2$ ($\pi \approx 3{,}14$), которая *каждому* положительному числу r ставит в соответствие *единственное* число S. Аналогично, площадь прямоугольника, длина которого в 2 раза больше его ширины b, описывается зависимостью $S = 2b^2$. Обобщая эти и многие другие подобные зависимости, приходим к функции $y = ax^2$, где x – независимая переменная, y – зависимая переменная, a – некоторое число ($a \neq 0$). Естественно расширить область определения функции $y = ax^2$ до множества всех чисел: $X = (-\infty; +\infty)$.

Выявим основные свойства графика функции $y = ax^2$. Для этого рассмотрим конкретные примеры этой функции: $y = 2x^2$ и $y = -0{,}5\,x^2$. Заполним таблицы данных зависимостей y от x и отметим на координатной плоскости точки с полученными координатами.

Функция $y = ax^2$ четна, так как $ax^2 = a(-x)^2$. Поэтому при построении графика можем воспользоваться его симметрией относительно оси ординат.

$y = 2x^2$

x	0	0,5	1	1,5	2
y	0	0,5	2	4,5	8

$y = -0{,}5\,x^2$

x	0	0,5	1	1,5	2	3
y	0	–0, 125	–0,5	–1,125	–2	–4,5

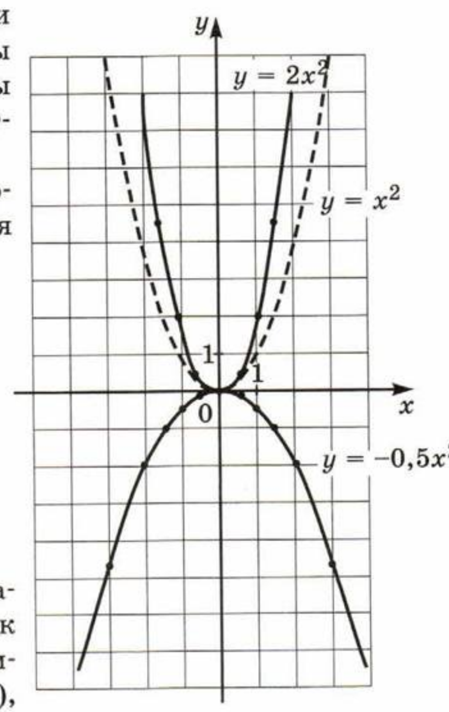


Рис. 1

Соединяя точки плавной линией, получим две параболы (рис. 1). Сравним полученные графики. Как и парабола $y = x^2$ (на рисунке она изображена пунктиром) оба графика касаются оси абсцисс в точке (0; 0), которая называется **вершиной параболы**.

Однако между этими параболами есть и различия: при $a = 2$ (так же, как и для $a = 1$) ветви параболы направлены вверх, а при $a = -0{,}5$ – вниз. Общее правило расположения ветвей параболы легко увидеть из формулы $y = ax^2$: при $a > 0$ они направлены вверх, а при $a < 0$ – вниз.

Из этой же формулы следует, что «крутизна» ветвей тем больше, чем больше $|a|$. В силу этого ветви параболы $y = 2x^2$ более тесно прижаты к оси Oy, чем ветви $y = x^2$, а ветви параболы $y = -0{,}5x^2$, наоборот, более пологие.

Подмеченные нами свойства можно обобщить.

Свойство 1. Графиком функции $y = ax^2$ является парабола с вершиной в точке (0; 0).

Свойство 2. Функция $y = ax^2$ является четной, поэтому парабола состоит из двух ветвей, симметричных относительно оси ординат. Эту ось называют **осью параболы**.

Свойство 3. График функции $y = ax^2$ касается оси абсцисс в вершине. При неограниченном приближении x к нулю график значительно ближе прилегает к оси абсцисс, чем к оси ординат.

Свойство 4. Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх, если $a < 0$ – вниз.

Свойство 5. С увеличением $|a|$ форма ветвей параболы становится более крутой, а с уменьшением – более пологой.

Свойство 6. При $a > 0$ функция $y = ax^2$ убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$. При $a < 0$ функция $y = ax^2$, наоборот, возрастает на промежутке $(-\infty; 0]$ и убывает на промежутке $[0; +\infty)$.

Теперь, познакомившись с функцией $y = ax^2$ и ее графиком, мы сможем исследовать более сложные функции.

Рассмотрим функцию $\boldsymbol{y = ax^2 + h}$ **(a ≠ 0)** и выявим основные свойства ее графика. Построим по точкам, например, функцию $y = 2x^2 + 3$ и сравним с графиком функции $y = 2x^2$.

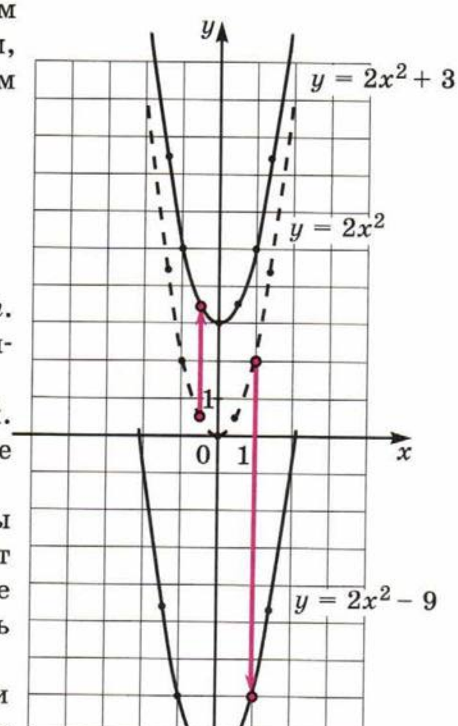


Рис. 2

$y = 2x^2 + 3$

x	0	0,5	1	1,5	2
y	3	3,5	5	7,5	11

Функция $y = ax^2 + h$ четна, так как $ax^2 + h = a(-x)^2 + h$. Поэтому при построении графика воспользуемся его симметрией относительно оси ординат (рис. 2).

Построенный график также является параболой. Все ординаты точек графика $y = 2x^2 + 3$ на три больше ординат точек графика $y = 2x^2$ с теми же абсциссами.

Если бы мы строили график $y = 2x^2 - 9$, то ординаты точек этого графика были бы на девять меньше ординат соответствующих точек графика $y = 2x^2$. Поэтому обе данные параболы $y = 2x^2 + 3$ и $y = 2x^2 - 9$ можно получить путем простого сдвига параболы $y = 2x^2$ вдоль оси Oy.

Обобщим наши наблюдения. Если $h > 0$, то точки графика $y = ax^2 + h$ выше соответствующих точек графика $y = ax^2$ на h, если $h < 0$, то ниже на $|h|$. Таким образом, **график** $\boldsymbol{y = ax^2 + h}$ **можно строить путем парал-**

лельного переноса графика $y = ax^2$ вдоль оси ординат вверх или вниз в зависимости от знака h.

Рассмотрим теперь график функции $\boldsymbol{y = a(x - d)^2}$, $a \neq 0$. Построим по точкам, например, график $y = 2(x - 3)^2$ и сравним его с графиком функции $y = 2x^2$.

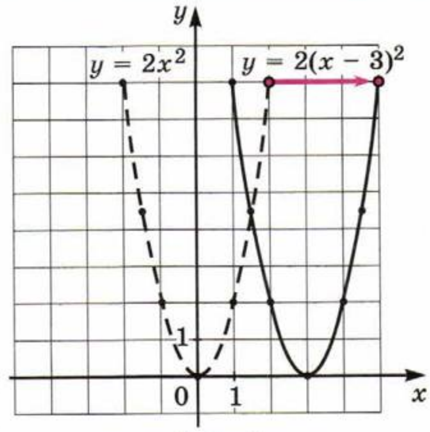


Рис. 3

$y = 2(x - 3)^2$

x	1	1,5	2	3	4	4,5	5
y	8	4,5	2	0	2	4,5	8

Полученный график (рис. 3) также называется параболой. При этом все абсциссы точек этого графика на три больше абсцисс точек графика $y = 2x^2$ с теми же ординатами. Значит, искомую параболу можно получить путем сдвига параболы $y = 2x^2$ вдоль оси Ox на 3 единицы вправо.

Итак, если $d > 0$, то точки графика $y = a\,(x - d)^2$ на d единиц правее соответствующих точек графика $y = ax^2$, а если $d < 0$,– то на $|d|$ единиц левее.

Следовательно, **график $y = a\,(x - d)^2$ можно строить путем параллельного переноса графика $y = ax^2$ вдоль оси абсцисс вправо или влево в зависимости от знака d.**

Итак, построение графиков функций $y = ax^2 + h$ и $y = a\,(x - d)^2$ можно упростить – не приводить каждый раз таблицу зависимости y от x с большим числом точек, а просто указать, как искомый график получается из графика $y = ax^2$, свойства которого нам уже известны. После этого станут очевидными координаты вершины этой «смещенной» параболы – $(0;\ h)$ или $(d;\ 0)$, от которой, зная направление ветвей, легко построить и саму параболу.

Для повышения точности построения можно вычислить координаты точек пересечения графика с осями координат. Чтобы найти точки пересечения с осью абсцисс ($y = 0$), нужно решить уравнение $ax^2 + h = 0$ или $a(x - d)^2 = 0$. А чтобы узнать точки пересечения с осью ординат, нужно вычислить значение функции при $x = 0$.

Ясно, что вершина параболы $y = ax^2 + h$ будет являться точкой пересечения графика с осью ординат, а вершина параболы $y = a(x - d)^2$ – точкой пересечения с осью абсцисс.

Пример 1.

Построить график функции $y = x^2 - 4$.

Решение:

График $y = x^2 - 4$ получается из графика $y = x^2$ сдвигом вниз на 4 единицы вдоль оси ординат (рис. 4).

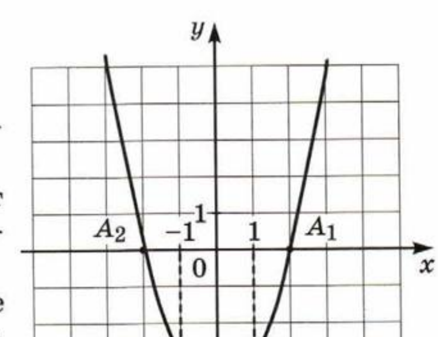


Рис. 4

Вершина параболы – точка B $(0;\ -4)$, она же будет точкой пересечения графика с осью ординат. Ветви параболы направлены вверх $(1 > 0)$.

При $y = 0$, получим уравнение $x^2 - 4 = 0$, которое имеет два корня $x = \pm 2$. Значит, график пересечет ось Oy в точках A_1 $(2;\ 0)$ и A_2 $(-2;\ 0)$.

Для более точного построения графиков можно вычислить координаты еще нескольких точек графика с несложными вычислениями, например $(1;\ -3)$ и $(-1;\ -3)$.

Пример 2.

Построить график функции $y = -(x + 3)^2$.

Решение:

График – парабола, полученная из параболы $y = -x^2$ сдвигом на 3 единицы влево вдоль оси абсцисс (рис. 5).

Вершина параболы – точка $B(-3; 0)$, и она же является точкой пересечения графика с осью Ox.

Ветви параболы направлены вниз $(-1 < 0)$.

При $x = 0$, $y = -(0 + 3)^2 = -9$. Значит, график пересекает ось ординат в точке $C(0; -9)$.

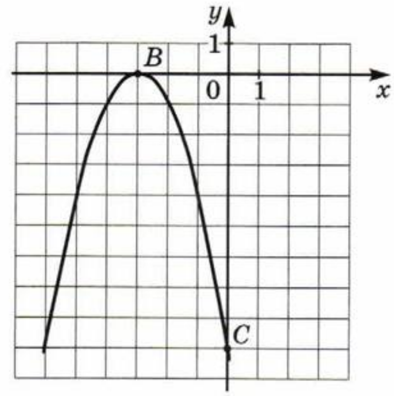


Рис. 5

На основании проведенных нами рассуждений можно сделать следующий вывод: **график функции $y = a(x - d)^2 + h$ можно построить при помощи двух последовательных параллельных переносов – сдвига графика $y = ax^2$ на d единиц вдоль оси абсцисс и сдвига полученного графика $y = a(x - d)^2$ на h единиц вдоль оси ординат.** При этом вершина параболы $y = a(x - d)^2 + h$ имеет координаты $(d; h)$.

Итак, мы приходим к следующему обобщенному алгоритму.

Алгоритм построения графика функции
$y = a(x - d)^2 + h$

1. Описать, с помощью какого сдвига и вдоль каких осей искомый график получается из графика $y = ax^2$.

2. Указать координаты вершины параболы ($x_в = d$; $y_в = h$) и направление ее ветвей.

3. Найти точки пересечения графика с осями координат:

- с осью Ox: $(x_п; 0)$, где $x_п$ – корень уравнения $a(x - d)^2 + h = 0$.
- с осью Oy: $(0; y_п)$, где $y_п$ – значение функции $y = a(x - d)^2 + h$ при $x = 0$.

4. Отметить на координатной плоскости найденные точки.

5. Построить график, «сдвинув» параболу $y = ax^2$ так, чтобы ее вершина была в точке $(d; h)$.

6. При необходимости вычислить координаты еще нескольких точек и уточнить расположение графика.

Пример 3.

Построить график функции $y = (x - 3)^2 - 1$.

Решение:

График $y = (x - 3)^2 - 1$ – парабола, полученная из параболы $y = x^2$ смещением на 3 единицы вправо вдоль оси абсцисс и на 1 единицу вниз вдоль оси ординат (рис. 6).

Имеет вершину $B(3; -1)$, ветви направлены вверх.

При $y = 0$, получим уравнение $(x - 3)^2 - 1 = 0$, которое имеет корни $x_1 = 4$, $x_2 = 2$. Значит, график пересекает ось абсцисс в точках $A_1(4; 0)$ и $A_2(2; 0)$.

При $x = 0$, $y = (0 - 3)^2 - 1 = 8$. Значит, график пересекает ось ординат в точке $C(0; 8)$.

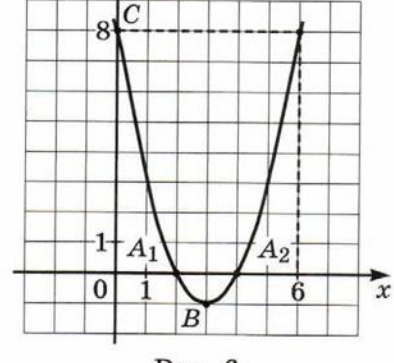


Рис. 6

К **444** Из приведенных ниже функций выберите ту, графиком которой является парабола:

$y = 4x + 2$; $y = x^3$; $y = x^2$; $y = \sqrt{x}$; $y = \dfrac{2}{x}$.

Постройте график выбранной вами функции и перечислите его свойства.

445 1) а) Одна сторона прямоугольника x дм, а другая в 2 раза больше. Запишите формулу зависимости площади прямоугольника y в дм^2 от длин его сторон.

б) Длина катета равнобедренного прямоугольного треугольника равна d см. Запишите формулу зависимости площади треугольника S в см^2 от длин его катетов.

в) Запишите формулу зависимости площади круга S в м^2 от длины его радиуса r в метрах (значение π считать равным 3, 14).

г) В каждом ряду концертного зала n мест, а рядов в 1,5 раза больше. Запишите формулу зависимости общего количества мест в зале C от числа мест в ряду и количества рядов.

2) Что общего во всех построенных вами формулах? Запишите их с помощью одной общей формулы. Является ли данная зависимость функциональной?

3) Постройте график функции, описанной под буквой а, заполнив таблицу. Сравните его с графиком, изображенным на рисунке 1 стр. 114 учебника. Предположите, как называется полученная кривая.

4) Какие свойства графика вы можете отметить? Сопоставьте их со свойствами на стр. 115 учебника. Какие из указанных в учебнике свойств вам удалось выявить самостоятельно?

446 Если тело свободно падает на поверхность Земли, то расстояние, пройденное за t секунд, можно найти по формуле $S = \dfrac{g \cdot t^2}{2}$ (м), где $g = 9{,}8$ м/с^2 – ускорение свободного падения. Составьте таблицу и постройте график зависимости S от t. За какое время падающее тело пролетит расстояние 490 м (считая от точки начала падения)? Формула выведена при условии незначительности сопротивления воздуха.

447 1) Постройте на одной координатной плоскости графики функций $y = 2x^2$ и $y = 2x^2 + 3$. Что вы замечаете? Продолжите исследование, начертив график функции $y = 2x^2 - 9$.

2) Укажите способ построения графика функции $y = 2x^2 + h$ без использования таблицы. Примените его для построения графиков $y = 2x^2 - 5$ и $y = 2x^2 + 5$. Проверьте свое предположение, сопоставив его с выводами на стр. 115–116 учебника.

448 1) Постройте на одной координатной плоскости графики функций $y = 2x^2$ и $y = 2(x - 3)^2$. Что вы замечаете? График какой функции вам нужно построить, чтобы продолжить исследование?

2) Укажите способ построения графика функции $y = 2(x - d)^2$ без использования таблицы. Примените его для построения графиков $y = 2(x - 1)^2$ и $y = 2(x + 1)^2$. Проверьте свое предположение, сопоставив его с выводами на стр. 116 учебника.

449 1) Используя опыт построения графиков функций $y = 2x^2 + h$ и $y = 2(x - d)^2$, постройте график $y = 2(x - 1)^2 + 5$. Подумайте, как можно повысить точность построения этого графика.

2) Составьте общий алгоритм построения графика $y = a(x - d)^2 + h$ и сравните его с алгоритмом на стр. 117 учебника.

450 Постройте графики функций:

а) $y = 0{,}5x^2$; б) $y = 0{,}5x^2 + 3$; в) $y = 0{,}5x^2 - 2$.

451 Постройте графики функций:

а) $y = (x - 2)^2$; б) $y = 3(x + 1)^2$; в) $y = -2(x - 1)^2 - 2$; г) $y = -(x + 3)^2 + 1$.

452 Постройте график функции:

$$y = \begin{cases} (x-3)^2 - 3, \text{ если } x \geqslant 1; \\ |x|, \text{ если } -5 \leqslant x < 1 \end{cases}$$

«Прочитайте» полученный график по известному плану.

П **453** Решите задачу:

«Из квадратного полотна сетки для покрытия всходов вырезали прямоугольник со сторонами в два раза меньшей и на 3 м меньшей стороны квадрата. Площадь оставшейся сетки стала равной 20 м². Найдите периметр прямоугольника, с тем чтобы заказать декоративное плетение вокруг более ранней посадки цветов».

454 Найдите значения выражений и, расположив их в порядке убывания, узнайте имя французского математика XVI века:

Р	$5+\sqrt{72}$	**Е**	$(-1)^2 - 2^4$	**А**	$(-1)^4(1-\sqrt{2})^2$
Т	$-3^2 + (-2)^3$	**Ф**	$(\sqrt{6}+\sqrt{3})^2$	**В**	$-1^2 \cdot (\sqrt{2}-1)^2$
И	$(\sqrt{10}-\sqrt{13})(\sqrt{10}+\sqrt{13})$	**Н**	$\sqrt{2^6}$	**А**	$\sqrt{2}(\sqrt{50}+\sqrt{2})$

С	$\sqrt{10\frac{9}{16}}$	**У**	$\sqrt{\left(3\frac{1}{5}-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{2}$

455 Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, зная его корень $5+\sqrt{2}$. Как связано это задание с математиком из предыдущего задания?

456 Сравните числа:

а) $\sqrt{13}-\sqrt{5}$ и $\sqrt{2}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{50}-7}-\dfrac{1}{\sqrt{50}+7}$ и $\sqrt{190}$.

457 Постройте график функции $y = \begin{cases} 2x-1, \text{ если } x \geqslant 1; \\ x^2, \text{ если } -1 \leqslant x < 1; \\ -2x-1, \text{ если } x < -1 \end{cases}$

Д **458** Постройте графики функций:

а) $y = 3x^2 - 2$; б) $y = 2(x - 6)^2$; в) $y = -2(x + 1)^2 + 5$.

459 Постройте графики функций:

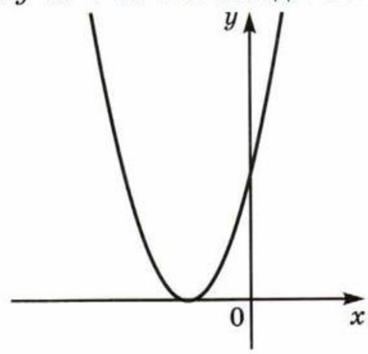
а) $y = (x - 3)^2 - 5$; б) $y = \begin{cases} -\dfrac{1}{x}, \text{ если } x \geqslant 1; \\ -(x+2)^2 + 8, \text{ если } x < 1. \end{cases}$

Обведите зеленым цветом ту часть графика, у которой значения функции положительны, синим цветом – значения функции отрицательны, красным цветом – значения функции равны нулю.

460 Сравните числа:

а) $\sqrt{17}-\sqrt{3}$ и $\sqrt{6}$; б) $\frac{120}{\sqrt{45}-3}-\frac{120}{\sqrt{45}+3}$ и $\sqrt{201}$.

С **461*** Дан график функции $y=x^2+ax+a$. Найдите a.



2. Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$

Познание подобно морю: тот, кто барахтается и плещется на поверхности, всегда больше шумит и потому привлекает к себе больше внимания, чем искатель жемчуга, без лишнего шума проникающий в поисках сокровищ до самого дна неизведанных глубин.

Вашингтон Ирвинг (1783–1859),
американский писатель

В предыдущем пункте мы познакомились с функциями $y = ax^2$, $y = ax^2 + h$, $y = a(x - d)^2$, $y = a(x - d)^2 + h$ и узнали, что их графиками являются параболы. Почему же функции, заданные различными формулами, имеют схожие графики? Дело в том, что все они являются частными случаями одной и той же функции.

Действительно, нетрудно заметить, что правые части всех функций являются квадратными трехчленами вида $ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$ (либо могут быть приведены к нему с помощью несложных преобразований). И, значит, все эти различные на первый взгляд функции могут быть заданы единой формулой $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$. Функции данного вида называют *квадратичными* функциями. Изучением общего случая квадратичной функции мы и займемся в этом пункте и, прежде всего, введем ее определение.

***Определение* 1.** Функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, называется **квадратичной** функцией.

Попробуем построить график какой-нибудь квадратичной функции, например $y = x^2 - 4x + 3$. Естественно попытаться свести ее к одному из известных нам случаев. Здесь это сделать просто: выделяя из правой части формулы полный квадрат, мы получим уже изученную ранее функцию вида $y = a(x - d)^2 + h$.

$$y = x^2 - 4x + 3 = (x^2 - 4x + 4 - 4) + 3 = (x - 2)^2 - 1.$$

Итак, мы имеем параболу, полученную из параболы $y = x^2$ смещением на 2 единицы вправо вдоль оси абсцисс и на 1 единицу вниз вдоль оси ординат.

Воспользуемся этой идеей для создания общего алгоритма построения графика функции $y = ax^2 + bx + c$. В правой ее части стоит квадратный трехчлен, из которого, как нам известно, всегда можно выделить полный квадрат.

Значит, чтобы построить график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, можно:

- выделить полный квадрат из соответствующего квадратного трехчлена;
- переписать функцию в виде $y = a(x - d)^2 + h$;
- построить график функции $y = a(x - d)^2 + h$.

Пример 1.

Построить график функции $y = 2x^2 + x + 2$.

Решение:

$$y=2\left(x^2+\frac{x}{2}\right)+2=2\left(x^2+2x\cdot\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)+2=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{8}.$$

Графиком функции $y = 2x^2 + x + 2$ будет парабола, полученная из параболы $y = 2x^2$ смещением на $\frac{1}{4}$ влево вдоль оси абсцисс и на $\frac{15}{8}$ вверх вдоль оси ординат. Вершина этой параболы – точка $B\left(-\frac{1}{4};\frac{15}{8}\right)$.

При $y = 0$ получим уравнение $2x^2 + x + 2 = 0$, которое не имеет корней. Следовательно, график не имеет общих точек с осью абсцисс.

Если $x = 0$, то $y = 2$ и, значит, график пересекает ось ординат в точке C (0; 2).

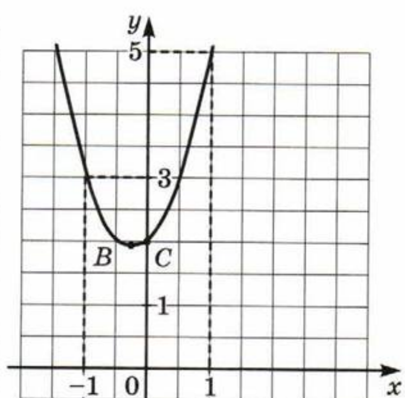


Рис. 1

Выделение полного квадрата из трехчлена, вообще говоря, может оказаться достаточно громоздкой процедурой (это видно хотя бы из приведенного примера). Чтобы упростить решение и сэкономить время, можно, как мы это делали раньше, выполнить преобразования *в общем виде один раз*, а затем в практических задачах просто использовать готовую общую формулу.

Выделяя полный квадрат из правой части квадратичной функции и вводя более удобные обозначения, получим:

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=a(x-d)^2+h, \text{ где}$$

$$d=-\frac{b}{2a},\quad h=\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Значит, графиком квадратичной функции является парабола, полученная из параболы $y = ax^2$ при помощи двух последовательных параллельных переносов: сдвигом на d единиц вдоль оси абсцисс и на h единиц вдоль оси ординат.

Заметим, что вершина искомой параболы имеет координаты $x_{\text{в}}=d=-\frac{b}{2a}$, $y_{\text{в}}=h=\frac{4ac-b^2}{4a}$. Знание координат вершины существенно облегчает построение графика: вершина подскажет, куда и на сколько нужно смещать параболу $y = ax^2$ вдоль осей.

Таким образом, значение абсциссы вершины параболы можно вычислить по формуле:

$$\boxed{x_{в}=-\frac{b}{2a}}$$

Эту формулу полезно запомнить. Зная абсциссу вершины, ее ординату проще вычислить не по формуле, а как значение функции $y_{в}$ в точке $x_{в}$:

$$y\,(x_{в})=a\,(x_{в})^{2}+bx_{в}+c.$$

Итак, мы приходим еще к одному способу построения графика квадратичной функции:

- вычислить координаты вершины параболы $B\,(x_{в}=-\frac{b}{2a};\ y_{в}=y\,(x_{в}))$;
- переписать функцию в виде $y=a(x-x_{в})^{2}+y_{в}$;
- построить график функции $y=a(x-x_{в})^{2}+y_{в}$.

По сути, он отличается от предыдущего лишь первым шагом. Здесь нам уже не приходится выделять полный квадрат трехчлена, чтобы прийти к знакомому виду функции – для этого достаточно воспользоваться выведенной формулой.

Пример 2.

Построить график функции $y=-x^{2}+x-1$.

Решение:

Вычислим координаты вершины параболы:

$$x_{B}=-\frac{b}{2a}=-\frac{1}{2\cdot(-1)}=\frac{1}{2};$$

$$y_{B}=y\left(\frac{1}{2}\right)=-\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{4}.$$

Вершина параболы – точка $B\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{4}\right)$. Значит,

$$y=-x^{2}+x-1=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2}-\frac{3}{4}.$$

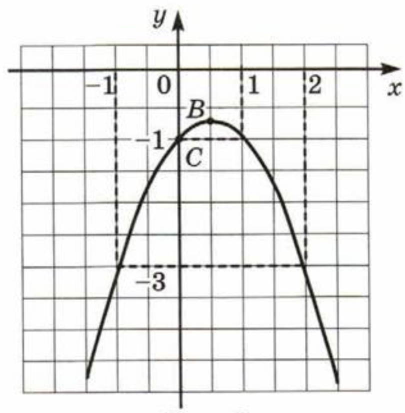


Рис. 2

Следовательно, графиком функции $y=-x^{2}+x-1$ является парабола, полученная смещением параболы $y=-x^{2}$ на $\frac{1}{2}$ вправо вдоль оси абсцисс и на $\frac{3}{4}$ вниз вдоль оси ординат. Ветви параболы направлены вниз.

При $y=0$ получим уравнение $-x^{2}+x-1=0$, которое не имеет корней. Значит, график не имеет общих точек с осью абсцисс.

Если $x=0$, то $y=-0^{2}+0-1=-1$. Значит, график пересекает ось ординат в точке $C\,(0;-1)$.

Для более точного построения параболы укажем координаты еще нескольких ее точек: $(-1;-3)$; $(1;-1)$; $(2;-3)$. График функции изображен на рис. 2.

Итак, мы получили два способа построения графика квадратичной функции. В каждом конкретном случае можно выбирать, как рациональнее перейти к функции вида $y=a(x-x_{в})^{2}+y_{в}$: при помощи формул координат вершины параболы или при помощи выделения полного квадрата.

Возможность преобразования любой квадратичной функции $y=ax^{2}+bx+c$ к виду $y=a(x-x_{в})^{2}+y_{в}$ позволяет провести исследование свойств ее графика.

Прежде всего, мы можем сделать важный вывод о том, что график любой квадратичной функции $y=ax^{2}+bx+c$ может быть получен из графика $y=ax^{2}$ с помощью соответствующих сдвигов вдоль осей координат. Значит, графики этих функций обладают схожими свойствами. Так, сохраняется зависимость направления ветвей параболы от знака коэффициента a, зависимость крутизны ветвей от величины $|a|$.

Вместе с тем из-за сдвигов вдоль осей некоторые свойства графика изменяются: вершина параболы $y = ax^2 + bx + c$ имеет координаты $B\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$, ось абсцисс не обязана быть касательной к параболе.

Функция $y = ax^2 + bx + c$ не всегда является четной (при $b \neq 0$ она не является ни четной, ни нечетной). Но симметрия графика все же остается при любых значениях x: осью симметрии любой параболы $y = ax^2 + bx + c$ является прямая, параллельная оси ординат и проходящая через ее вершину, то есть прямая $x = -\frac{b}{2a}$.

Изменение координат вершины параболы приводит и к изменению промежутков возрастания и убывания функции. Так, при $a > 0$ функция убывает на промежутке $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ и возрастает на промежутке $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$. При $a < 0$, наоборот, на промежутке $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ функция возрастает, а на промежутке $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ – убывает.

Всеми установленными свойствами можно пользоваться при построении графиков, чтобы упрощать свою работу. Так, например, в последнем примере можно было ограничиться вычислением координат только двух точек $(0; -1)$ и $(-1; -3)$, после чего воспользоваться симметрией графика относительно прямой $x = \frac{1}{2}$.

Итак, мы приходим к следующему обобщенному алгоритму:

Алгоритм построения графика функции $y = ax^2 + bx + c$

1. Представить функцию в виде $y = a(x - x_в)^2 + y_в$, выделяя полный квадрат, либо используя формулу координат вершины $B\left(x_в = -\frac{b}{2a}; y_в = y(x_в)\right)$.
2. Описать, как график функции $y = a(x - x_в)^2 + y_в$ получен из $y = ax^2$.
3. Построить график, «сдвинув» параболу $y = ax^2$ так, чтобы ее вершина была в точке $B(x_в; y_в)$.
4. Уточнить расположение параболы, вычислив координаты нескольких точек графика.

К **462** Запишите функцию $y = ax^2 + bx + c$ при $a = 1$, $b = 2$ и $c = 3$; при $a = 2$, $b = 0$ и $c = 3$; при $a = -1$, $b = 2$ и $c = 0$; при $a = 4$, $b = 0$ и $c = 0$. Графики каких из этих функций вы уже умеете строить?

463 Что общего в функциях

$$y = \frac{1}{3}x^2; \quad y = 3x^2 + 4; \quad y = x^2 - 3x + 0{,}5; \quad y = 2(x - 6)^2; \quad y = (x - 2)^2 - 1.$$

Запишите все эти функции в общем виде, предварительно упростив правую часть двух последних функций.

Предположите, как называется данная функция, и сопоставьте свой вариант с определением на стр. 120 в учебнике.

464 Выделите полный квадрат трехчлена $x^2 - 4x + 3$.

465 1) Постройте график функции $y = x^2 - 4x + 3$. Какое преобразование поможет свести данную функцию к известному случаю?

2) Подойдет ли способ, использованный при построении графика $y = x^2 - 4x + 3$, для построения всех функций вида $y = ax^2 + bx + c$? Сравните свои предположения со способом построения графика квадратичной функции, приведенным на стр. 121.

466 Постройте график функции $y = 2x^2 + x - 3$. Является ли полученный вами способ удобным в этом случае? Познакомьтесь с еще одним способом построения графика квадратичной функции в учебнике и выполните построение, используя формулу вершины параболы.

467 Найдите координаты вершины параболы $y = -3x^2 + 2x - 1$. На каких промежутках функция $y = -3x^2 + 2x - 1$ возрастает или убывает?

468 Найдите координаты вершин парабол:

а) $y = x^2 + 8x - 3$; б) $y = 3x^2 - 5x + 1$; в) $y = -2x^2 - 3x + 5$.

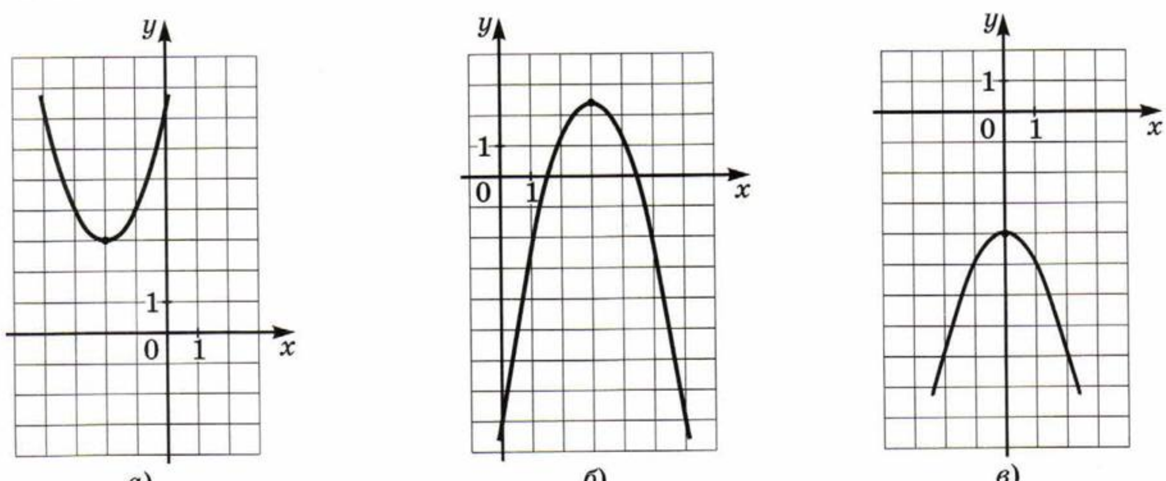
469 Постройте графики квадратичных функций:

а) $y = x^2 + 8x + 12$; в) $y = 4x^2 + 2x + 1$;

б) $y = 3x^2 - 6x - 2$; г) $y = -x^2 - 4x + 1$.

Обведите зеленым цветом ту часть графика, где значения функции положительны, синим цветом – где значения функции отрицательны.

470 Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ задана графически. Определите знаки коэффициентов a, b, c и дискриминанта D соответствующего квадратного трехчлена:



а) б) в)

471 Решите системы неравенств:

а) $\begin{cases} 3x - 7 \geqslant 3 \\ 5 - 2x < -2 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x - 2 \leqslant 1 \\ 13 - 4x < 1 \end{cases}$; д) $\begin{cases} 1 - 2x \leqslant 3 \\ 3x + 2 < 1 \end{cases}$; ж) $\begin{cases} 6 - 3x \geqslant 7 \\ 3 + 5x > 1 \end{cases}$;

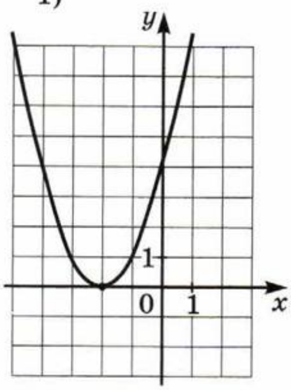
б) $\begin{cases} 2 - 5x \leqslant -3 \\ 3x - 8 < 5 \end{cases}$; г) $\begin{cases} x - 2 \leqslant 4 \\ 3x - 12 > 5 \end{cases}$; е) $\begin{cases} 2 - 4x > 3 \\ 3x + 2 \leqslant 1 \end{cases}$; з) $\begin{cases} 3 - 4x > 5 \\ 6 + 9x \leqslant 1 \end{cases}$.

472 Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств:

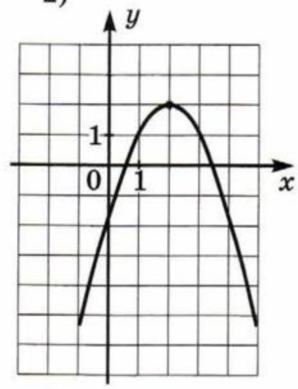
а) $\begin{cases} 3x - y \geqslant 0 \\ x + 3y \leqslant 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x - 2y + 2 \geqslant 0 \\ -2x + y - 4 \leqslant 0 \end{cases}$.

473 Чтобы узнать имя ученого, который ввел понятие парабола, сопоставьте последовательно график функции с формулой.

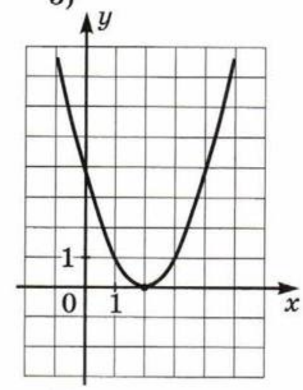
1)



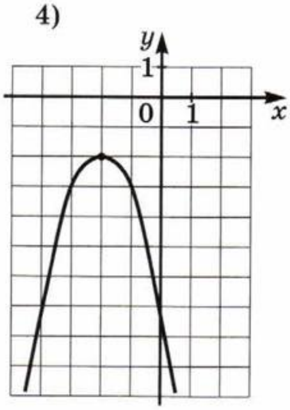
2)



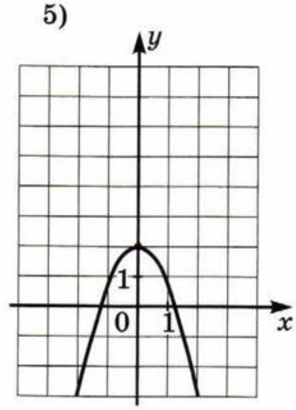
3)



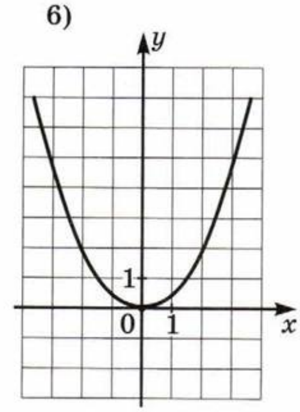
4)



5)



6)



Р $y = -x^2 + 2$; **А** $y = -(x + 2)^2 - 2$; **Д** $y = (x + 2)^2$;

К $y = (x - 2)^2$; **Е** $y = -(x - 2)^2 + 2$; **Т** $y = \dfrac{x^2}{2}$.

1	2	3	4	5	6

474 Выделите полный квадрат трехчленов:

а) $x^2 + 6x - 7$; в) $-x^2 - 4x + 1$;

б) $2x^2 - 4x + 5$; г) $-3x^2 + 2x + 1$.

475 Постройте графики квадратичных функций:

а) $y = x^2 + 2x - 3$; в) $y = 2x^2 - 4x + 1$; д) $y = -3x^2 - 6x + 5$.

б) $y = 3x^2 + 2x - 1$; г) $y = 2x^2 + 4x$; е) $y = -2x^2 - 5x + 1$.

476 Решите системы неравенств:

а) $\begin{cases} 2-3x>1 \\ 2x+3<2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 5x+4 \geqslant 2 \\ 3-2x<4 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 3+4x \leqslant 1 \\ 2-7x>6 \end{cases}$;

г) $\begin{cases} 2+11x \leqslant -5 \\ 3-3x<5 \end{cases}$; д) $\begin{cases} 12x-9{,}6 \geqslant 0 \\ 14-2\dfrac{1}{3}x<0 \end{cases}$; е) $\begin{cases} -10{,}5-7x<0 \\ 1{,}3x-11{,}7 \leqslant 0 \end{cases}$;

ж) $\begin{cases} 2{,}4x+14{,}4 \geqslant 0 \\ -5{,}1+2x \leqslant 0 \end{cases}$; з) $\begin{cases} 2{,}8x-14 \geqslant 0 \\ 6-1{,}2x \geqslant 0 \end{cases}$.

C **477*** На рисунке изображены графики трех квадратных трехчленов. Могут ли это быть трехчлены $ax^2 + bx + c$, $cx^2 + ax + b$, $bx^2 + cx + a$?

478* На рисунке изображены графики трех квадратных трехчленов. Могут ли это быть трехчлены $ax^2 + bx + c$, $cx^2 + ax + b$, $bx^2 + cx + a$?

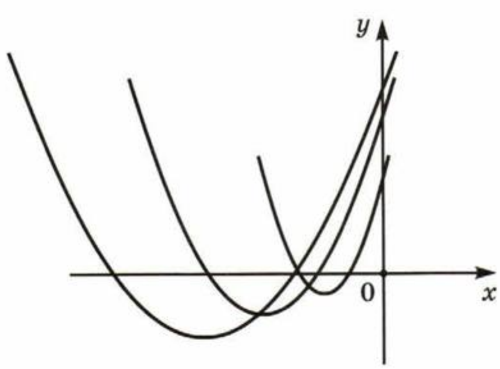


Рис. к задаче № 477

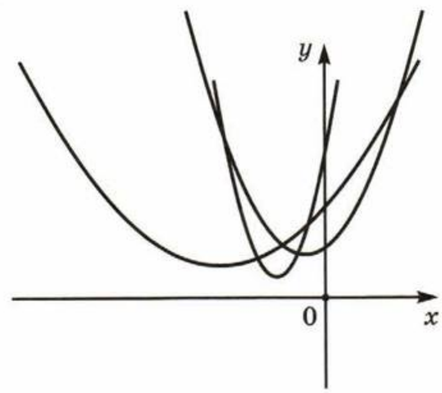


Рис. к задаче № 478

479* На рисунке изображен график приведенного квадратного трехчлена (ось ординат стерлась, расстояние между соседними отмеченными точками равно 1). Чему равен дискриминант этого трехчлена?

480* На рисунке изображены графики трех квадратных трехчленов. Можно ли подобрать такие числа a, b и c, чтобы это были графики трехчленов $y = ax^2 + bx + c$, $y = bx^2 + cx + a$ и $y = cx^2 + ax + b$?

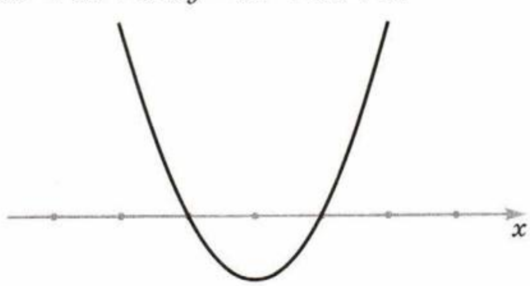


Рис. к задаче № 479

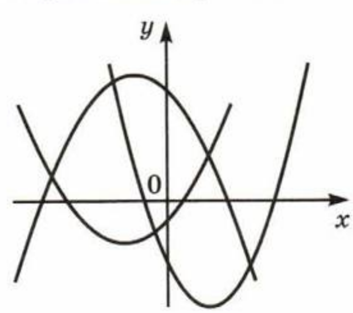


Рис. к задаче № 480

481* Квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$ не имеет корней и $a + b + c > 0$. Найдите знак коэффициента c.

3.* Наибольшее и наименьшее значение квадратного трехчлена

Жаден разум человеческий. Он не может ни остановиться, ни пребывать в покое, а порывается все дальше.

Френсис Бэкон (1561–1626),
английский философ, историк, политический деятель

Практические задачи, которые приходится решать в жизни разным людям – исследователям, экономистам, бизнесменам, спортсменам,– часто бывают связаны с вопросами: как быстрее, выше, больше или меньше, удобнее и эффективнее... Другими словами, каким образом получить наилучший результат. Исследование математических моделей таких задач сводится к поиску наибольшего или наименьшего значения функции. В данном пункте мы будем учиться использовать график квадратичной функции для нахождения наибольшего и наименьшего значения квадратных трехчленов.

Из графика общего случая квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ легко видеть, что в случае $a > 0$ квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ принимает *наименьшее* значение в вершине параболы, то есть при $x = -\dfrac{b}{2a}$; это наименьшее значение равно $\dfrac{4ac - b^2}{4a}$ (рис.1а).

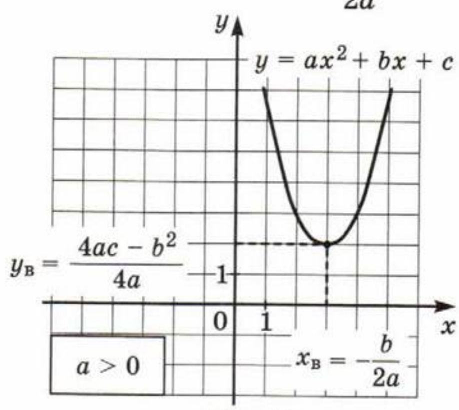


Рис. 1а

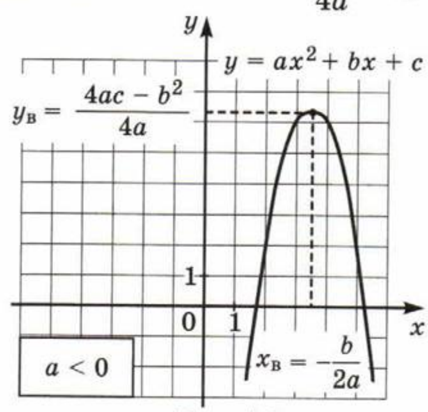


Рис. 1б

Если $a < 0$, то квадратный трехчлен принимает *наибольшее* значение в вершине параболы, то есть при $x = -\dfrac{b}{2a}$; оно также равно $\dfrac{4ac - b^2}{4a}$ (рис. 1б). Помнить это наибольшее (наименьшее) значение в общем виде нет необходимости, важно лишь знать, что оно достигается в вершине параболы.

Итак, мы приходим к выводу:

> Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ принимает наибольшее (наименьшее) значение в вершине параболы, то есть при $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Пример 1.

Какое наименьшее значение принимает выражение $5x^2 - 10x + 1$?

Решение:

Вычислим абсциссу вершины параболы $y = 5x^2 - 10x + 1$: $x_в = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-10}{2 \cdot 5} = 1$.

Так как $a > 0$, то в точке $x_в$ достигается *наименьшее* значение квадратного трехчлена. Если $x = 1$, то $5x^2 - 10x + 1 = 5 - 10 + 1 = -4$.

Ответ: наименьшее значение выражения $5x^2 - 10x + 1$ равно -4.

В практических задачах часто возникает необходимость найти наибольшее или наименьшее значение квадратного трехчлена не при всех возможных значениях x, а лишь при x, принадлежащих некоторому отрезку $[A; B]$. Здесь возникает два различных случая: абсцисса вершины параболы может принадлежать отрезку $[A; B]$ и не принадлежать ему. Рассмотрим их.

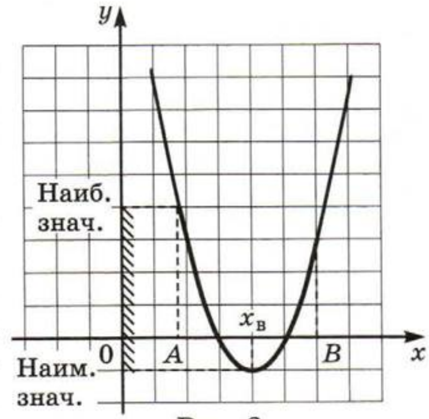


Рис. 2

Случай 1. Абсцисса вершины параболы ($x_в$) принадлежит отрезку $[A; B]$.

1) Пусть $a > 0$. Так как в этом случае функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает наименьшее значение в своей вершине, а абсцисса вершины принадлежит отрезку $[A; B]$, то квадратный трехчлен принимает наименьшее значение при $x_в$ (рис. 2).

Для нахождения наибольшего значения нужно рассмотреть значения трехчлена в концах отрезка – точках A и B. Большее из них и будет наибольшим значением квадратного трехчлена на отрезке $[A; B]$.

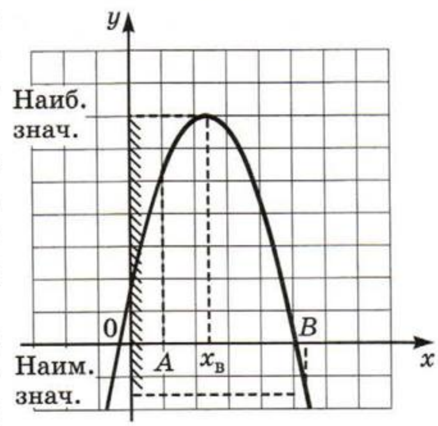


Рис. 3

2) Пусть $a < 0$. Так как в этом случае функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает наибольшее значение в своей вершине, а абсцисса вершины принадлежит отрезку $[A; B]$, то квадратный трехчлен принимает наибольшее значение при $x_в$ (рис. 3).

Для нахождения наименьшего значения нужно рассмотреть значения трехчлена в концах отрезка – точках A и B. Меньшее из них и будет наименьшим значением квадратного трехчлена на отрезке $[A; B]$

* * *

На самом деле, из симметричности графика относительно оси параболы можно понять, что наибольшее (при $a > 0$) или наименьшее (при $a < 0$) значение будет в той из точек A или B, которая дальше от $x_в$.

Случай 2. Абсцисса вершины параболы ($x_в$) не принадлежит отрезку $[A; B]$.

Рис. 4

Так как $x_в \notin [A; B]$, то наименьшее и наибольшее значение функция принимает на концах этого отрезка. Поэтому для нахождения наибольшего и наименьшего значения трехчлена рассмотрим его значения в концах отрезка – точках A и B. Большее из них будет наибольшим значением трехчлена на отрезке $[A; B]$, а меньшее – наименьшим значением.

Все возможные расположения параболы в случае 2 изображены на рис. 4.

* * *

Понять, в какой из точек A или B будет наибольшее, а в какой наименьшее значение можно и не вычисляя этих значений. Для этого достаточно понять, на какую из ветвей параболы попадают точки с абсциссами A и B. Например, если $a > 0$, а точки A и B правее точки $x_в$, то они лежат на правой ветви параболы, там квадратичная функция возрастает. Поэтому в точке B значение будет больше, чем в точке A.

Из проведенных рассуждений можно сделать следующий вывод:

Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ принимает наибольшее (наименьшее) значение на отрезке $[A; B]$ либо при $x_в = -\dfrac{b}{2a}$, либо при $x = A$, либо при $x = B$.

Пример 2.

Найти наибольшее и наименьшее значение, которое принимает квадратный трехчлен $2x^2 - 5x + 3$ при $x \in [1; 2]$.

Решение:

Сначала нужно установить, принадлежит ли абсцисса $x_в$ вершины параболы $y = 2x^2 - 5x + 3$ отрезку $[1; 2]$. Для этого найдем ее значение: $x_в = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-5}{2 \cdot 2} = \dfrac{5}{4} = 1\dfrac{1}{4}$.

Значит, $x_в \in [1; 2]$ и $a > 0$. Следовательно, в точке $x_в$ достигается *наименьшее* значение квадратного трехчлена. Вычислим его: $2\left(\dfrac{5}{4}\right)^2 - 5 \cdot \dfrac{5}{4} + 3 = -\dfrac{1}{8}$.

Чтобы найти *наибольшее* значение, вычислим значения трехчлена в концах отрезка, то есть при $x = 1$ и $x = 2$.

Если $x = 1$, то $2x^2 - 5x + 3 = 2 \cdot 1 - 5 + 3 = 0$.

Если $x = 2$, то $2x^2 - 5x + 3 = 2 \cdot 4 - 5 \cdot 2 + 3 = 1$.

Сравнивая полученные значения ($1 > 0$), делаем вывод, что наибольшее значение квадратного трехчлена на отрезке $[1; 2]$ равно 1.

Ответ: наименьшее значение трехчлена $2x^2 - 5x + 3$ на отрезке $[1; 2]$ равно $-\dfrac{1}{8}$, а наибольшее значение равно 1.

Итак, мы приходим к следующему алгоритму.

Алгоритм нахождения наименьшего (наибольшего) значения квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ на отрезке $[A; B]$

1. Вычислить значение абсциссы вершины параболы $x_в = -\dfrac{b}{2a}$ и определить принадлежность $x_в$ отрезку $[A; B]$.
2. Если $x_в \in [A; B]$, вычислить значение трехчлена при $x_в$. При $a > 0$ в точке $x_в$ достигается *наименьшее* значение, при $a < 0$ – *наибольшее*.
3. Вычислить значения трехчлена при $x = A$ и при $x = B$.
4. Сравнить полученные значения трехчлена и сделать вывод о его наибольшем и наименьшем значении.

Пример 3.

Найти наибольшее и наименьшее значения квадратного трехчлена:
а) $7x^2 + x + 1$ на отрезке [0; 1]; б) $-2x^2 + 4x$ на отрезке [0; 2].

Решение:

а) $x_в = -\frac{1}{14}$, $x_в \notin [0; 1]$. Если $x = 0$, то $7x^2 + x + 1 = 1$; если $x = 1$, то $7x^2 + x + 1 = 9$.

Ответ: наибольшее значение выражения $7x^2 + x + 1$ на отрезке [0; 1] равно 9, наименьшее – равно 1.

б) $x_в = 1$, $x_в \in [0; 2]$ и $a < 0$. Значит, наибольшее значение трехчлена достигается при $x_в = 1$ и равно $-2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 = 2$. Если $x = 0$, то $-3x^2 + 2x = 0$; если $x = 2$, то $-x^2 + 4x = 0$.
Значения на концах отрезка совпали, что объясняется симметрией графика.

Ответ: наибольшее значение выражения $-2x^2 + 4x$ на отрезке [0; 2] равно 1, наименьшее – равно 0.

* * *

Пример 4.

Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v = 19{,}6$ м/с. На какую наибольшую высоту может подняться тело в течение: а) первой секунды после броска; б) трех секунд после броска? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение:

В момент времени t после броска тело будет находиться на высоте $h = vt - \frac{gt^2}{2}$, где g – ускорение свободного падения. Так как $g = 9{,}8$ м/с^2 и $v = 19{,}6$ м/с, то $h = 19{,}6t - 4{,}9t^2$ м. Нужно найти наибольшее значение трехчлена $19{,}6t - 4{,}9\,t^2$ на отрезке: а) [0; 1]; б) [0;3].

Вершина параболы $h = -4{,}9t^2 + 19{,}6t$ имеет абсциссу $t_в = \frac{19{,}6}{2 \cdot 4{,}9} = 2$.

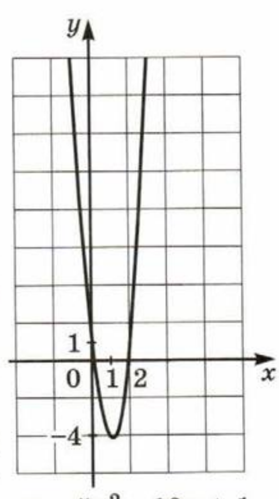
а) Так как $t_в \notin [0; 1]$, то нужно найти значения трехчлена в концах отрезка.
Если $t = 0$, то $19{,}6t - 4{,}9\,t^2 = 0$; если $t = 1$, то $19{,}6t - 4{,}9\,t^2 = 14{,}7$.
Наибольшее значение равно 14,7.

б) Так как $t_в \in [0; 3]$ и $-4{,}9 < 0$, то наибольшее значение достигается в точке $t = 2$ и равно $19{,}6 \cdot 2 - 4{,}9 \cdot 4 = 19{,}6$.

Ответ: а) 14,7 м; б) 19,6 м.

К **482** Найдите абсциссу вершины параболы $y = -2x^2 - 4x + 1$. Вычислите значение функции в вершине и при $x = 0$. Сравните полученные значения.

483 Вычислите, какие значения принимает функция $y = 0{,}5x^2 + x - 4$ на концах отрезка $x \in [2; 4]$. На каком конце этого отрезка функция принимает большее значение?



$y = 5x^2 - 10x + 1$

484 1) Определите с помощью графика, какое наименьшее значение принимает функция $y = 5x^2 - 10x + 1$. При каком значении аргумента это происходит? В какой точке графика трехчлен $5x^2 - 10x + 1$ принимает наименьшее значение?

2) Как найти наименьшее значение квадратного трехчлена $5x^2 - 10x + 1$, не выполняя построения графика? Сопоставьте свое решение со способом, предложенным на стр. 127.

3) В какой точке трехчлен $-5x^2 + 10x - 1$ принимает свое наибольшее значение? Как вычислить это значение, не выполняя построения графика?

4) Опираясь на проведенные рассуждения, предположите, как найти наименьшее (наибольшее) значение квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, не выполняя построения. Сопоставьте свой вывод с выводом на стр. 127.

485 1) Определите с помощью графика, какое наименьшее и наибольшее значение принимает функция $y = 5x^2 - 10x + 1$ на отрезке $[0; 3]$. При каких значениях аргумента это происходит?

2) Определите с помощью графика, какое наименьшее и наибольшее значение принимает функция $y = 5x^2 - 10x + 1$ на отрезке $[2; 3]$. При каких значениях аргумента это происходит?

3) Как найти наименьшее значение квадратного трехчлена $5x^2 - 10x + 1$ на отрезке $[A; B]$, не выполняя построения графика?

4) Опираясь на проведенные рассуждения, предположите, как вычислить наименьшее и наибольшее значение квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ на отрезке $[A; B]$. Сопоставьте свой способ с алгоритмом, предложенным на стр. 135.

486 Найдите наибольшее и наименьшее значения квадратного трехчлена:

а) $-x^2 + 5x + 7$ на отрезке $[3; 4]$;

б) $-2x^2 + 7x + 1$ на отрезке $[1; 3]$;

в) $-3x^2 + 2x$ на отрезке $[0; 2]$;

г) $2x^2 - x - 3$ на отрезке $[-1; 1]$;

д) $x^2 - 11x + 24$ на отрезке $[0; 5]$;

е) $5x^2 - 3x$ на отрезке $[0; 1]$.

487 Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v = 14,7$ м/с. На какую наибольшую высоту может подняться тело в течение: а) $\frac{1}{7}$ первой секунды после броска; б) двух секунд после броска? Сопротивлением воздуха пренебречь.

П **488** Для данных квадратичных функций найдите координаты вершин парабол $(x_в; y_в)$.

№	Квадратичная функция	$(x_в; y_в)$	Искомое слово
1	$y = x^2 - 9$		Ж
2	$y = x^2 - 4x + 3$		Д
3	$y = x^2 + 5x + 7$		А
4	$y = -x^2 + x$		Р
5	$y = -x^2 - 2x - 1$		Б
6	$y = -3x^2 + 2x - 6$		У

а) Заполните таблицу. Расположив абсциссы вершин в порядке убывания, прочитайте слово. Какие традиции помогают развивать это в вашем классном коллективе?

б) Найдите точки пересечения парабол с осью Ox и с осью Oy.

в) Постройте эскизы графиков и выделите зеленым цветом ту часть графика, где значения функции положительны, красным цветом – где значения функции отрицательны, синим цветом – те точки, в которых функция равна нулю.

489 Докажите, что значение выражения есть число рациональное:

а) $4\sqrt{3\frac{1}{2}}-0{,}5\sqrt{56}-3\sqrt{1\frac{5}{9}}$;

б) $15\sqrt{\frac{3}{5}}-0{,}5\sqrt{60}+2\sqrt{3\frac{3}{4}}-3\sqrt{15}$;

в) $\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}$;

г) $\left(5-\sqrt{3}\right)\left(5+\sqrt{3}\right)$.

490 Упростите выражение:

а) $10\sqrt{\frac{2}{5}}-0{,}5\sqrt{160}+3\sqrt{1\frac{1}{9}}$;

б) $3\sqrt{2\frac{1}{3}}-\sqrt{84}-4\sqrt{5\frac{1}{4}}$;

в) $\sqrt{168}+4\sqrt{10\frac{1}{2}}-5\sqrt{1\frac{17}{25}}$;

г) $\sqrt{152}+9\sqrt{4\frac{2}{9}}+2\sqrt{9\frac{1}{2}}$;

д) $4\sqrt{8\frac{1}{2}}-\sqrt{136}-10\sqrt{1\frac{9}{25}}$;

е) $\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}-\sqrt{5}$;

ж) $\sqrt{(\sqrt{6}-5)^2}-5$;

з) $\sqrt{\left(\sqrt{7}-5\right)^2}+\sqrt{7}$;

и) $\sqrt{(2\sqrt{10}-6)^2}-\sqrt{10}$;

к) $\sqrt{\left(5-\sqrt{30}\right)^2}+\sqrt{\left(6-\sqrt{30}\right)^2}$.

Д **491** Найдите наибольшее и наименьшее значения квадратного трехчлена:

а) x^2+2x+5 на отрезке $[0; 2]$;

б) $3x^2+2x+1$ на отрезке $[-2; 2]$;

в) $2x^2-3x-2$ на отрезке $[0; 1{,}5]$;

г) $-x^2-2x+2$ на отрезке $[0; 3]$.

492 Упростите выражение:

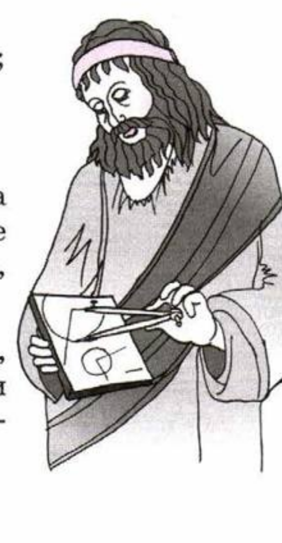
а) $\sqrt{6}-\sqrt{\left(\sqrt{6}-2\right)^2}$;

б) $\sqrt{\left(\sqrt{15}-4\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{15}-3\right)^2}$;

в) $\left(\sqrt{14}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{14}\right)$;

г) $\left(\sqrt{8}-5\right)^2+20\sqrt{2}$.

С **493*** Набор, состоящий из целых чисел a, b, c, заменили на набор $a-1$, $b+1$, c^2. В результате получились те же числа a, b, c, но в другом порядке. Найдите числа a, b, c, если известно, что их сумма равна 1001.



494* Существует ли 30-значное число с ненулевыми цифрами, которое не делится на 9, но такое, что при вычеркивании любой одной его цифры получается 29-значное число, которое делится на 9?

§ 3. Квадратные неравенства

1. Решение квадратных неравенств

Много из математики не остается в памяти, но когда поймешь ее, тогда легко при случае вспомнить забытое.

М.В. Остроградский (1801–1861),
русский математик, педагог

Мы уже умеем решать задачи с помощью квадратных уравнений, однако, как мы помним, практические задачи могут сводиться и к решению неравенства. Естественно, что среди них могут быть и неравенства со второй степенью неизвестного. Поэтому в данном пункте мы научимся решать такие неравенства. А ключом к их решению станут уже имеющиеся у нас знания о квадратичной функции и ее графике.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1

Одну сторону квадрата увеличили на 3,5 см, а вторую на 5 см. В результате получили прямоугольник, площадь которого составила менее 45 см^2. Укажите все возможные значения длины стороны квадрата.

Решение:

Пусть сторона квадрата составляет x см, $x > 0$. Тогда стороны полученного прямоугольника равны $(x + 3{,}5)$ см и $(x + 5)$ см. Значит, его площадь равна произведению $(x + 3{,}5)(x + 5)$ см^2, что по условию задачи составляет менее 45 см^2. Таким образом, мы приходим к неравенству: $(x + 3{,}5)(x + 5) < 45$.

Выполняя преобразования, получим неравенство, в левой части которого стоит квадратный трехчлен, а в правой – нуль:

$$(x + 3{,}5)(x + 5) < 45 \Leftrightarrow x^2 + 3{,}5x + 5x + 17{,}5 - 45 < 0 \Leftrightarrow x^2 + 8{,}5x - 27{,}5 < 0.$$

Данное неравенство не сводится к линейному, и мы приходим к необходимости изучить новый для нас тип неравенств – *квадратные неравенства*.

Определение. **Квадратным неравенством** называется неравенство вида $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leqslant 0$, где a, b, c – некоторые числа, $a \neq 0$.

Решим полученное в задаче неравенство и применим проведенные рассуждения для построения общего алгоритма решения квадратных неравенств.

Чтобы решить неравенство, нам необходимо найти все значения x, при которых квадратный трехчлен $x^2 + 8{,}5x - 27{,}5$ принимает отрицательные значения. Эту новую задачу переформулируем так, чтобы свести ее к уже известным нам алгоритмам: указать все значения x, при которых квадратичная функция $y = x^2 + 8{,}5x - 27{,}5$ принимает отрицательные значения. А для ответа на этот вопрос мы можем воспользоваться графиком квадратичной функции, который строить уже умеем.

График функции $y = x^2 + 8{,}5x - 27{,}5$ изображен на рис. 1. Ясно, что функция равна нулю в точках пересечения с осью абсцисс, положительна в точках, лежащих выше оси абсцисс, и отрицательна в точках, лежащих ниже оси абсцисс.

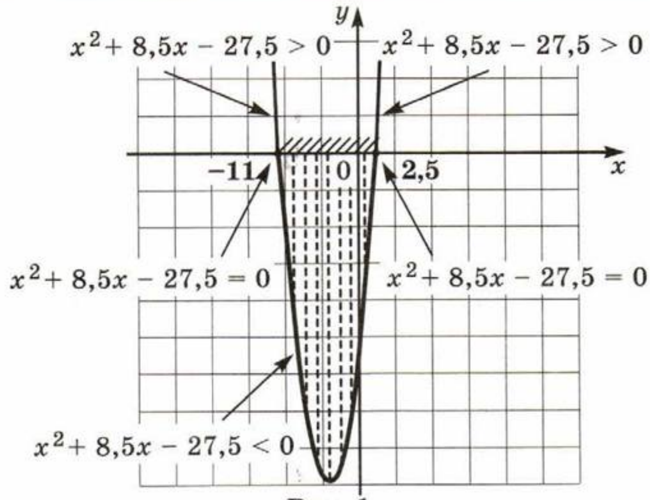


Рис. 1

Часть параболы, где значения функции меньше нуля, выделена на графике жирной линией. Нам осталось лишь указать соответствующие значения x. Мы видим, что абсциссы нужных нам точек графика принадлежат интервалу $(-11; 2{,}5)$.

Итак, решением неравенства является множество значений $x \in (-11; 2{,}5)$.

Найденный нами способ рассуждений дает идею для создания **общего алгоритма решения квадратного неравенства:**

• построить график, соответствующей квадратичной функции;

• определить по графику, при каких значениях x функция положительна, равна нулю, отрицательна;

• выбрать и записать ответ, соответствующий знаку неравенства.

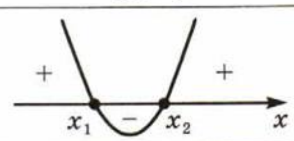
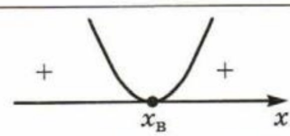
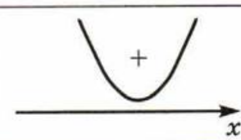
Можно ли упростить этот способ решения квадратных неравенств?

Очевидно, что самой трудоемкой частью данного алгоритма является построение графика квадратичной функции. Однако можно заметить, что для решения неравенства нужен, собственно, не сам график, а лишь направление ветвей параболы и точки ее пересечения с осью абсцисс.

Между тем направление ветвей параболы легко определяется по знаку коэффициента при x^2 – график для этого строить не требуется. Более того, для простоты мы можем исследовать лишь случай $a > 0$, так как при $a < 0$ обе части неравенства можно умножить на (-1) и получить неравенство противоположного знака, равносильное исходному.

Для определения точек пересечения параболы с осью абсцисс график также не нужен: достаточно решить уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, корни которого (если они существуют) как раз и являются абсциссами искомых точек.

Поэтому для поиска решения неравенства нужен не график, а простая схема, показывающая расположение параболы относительно оси Ox. Все варианты таких схем в зависимости от знака дискриминанта D, а также решения соответствующих неравенств приведены в следующей таблице (при $a > 0$).

Схема / Неравенство	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
			
$ax^2 + bx + c > 0$	$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$x \in (-\infty; x_в) \cup (x_в; +\infty)$	$x \in (-\infty; +\infty)$
$ax^2 + bx + c \geqslant 0$	$x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$	$x \in (-\infty; +\infty)$	$x \in (-\infty; +\infty)$
$ax^2 + bx + c < 0$	$x \in (x_1; x_2)$	$x \in \varnothing$	$x \in \varnothing$
$ax^2 + bx + c \leqslant 0$	$x \in [x_1; x_2]$	$x = x_в$	$x \in \varnothing$

Мы можем записать алгоритм решения квадратных неравенств.

Алгоритм решения квадратного неравенства

1. Если коэффициент при x^2 отрицательный, нужно умножить обе части неравенства на (-1) и далее решать неравенство противоположного знака.

2. Определить знак дискриминанта квадратного трехчлена, стоящего в левой части неравенства и найти его корни (если они существуют).

3. Изобразить схематически график соответствующей квадратичной функции.

4. Определить по схеме интервалы или точки, удовлетворяющие знаку неравенства (или то, что таких нет).

5. Записать ответ.

Пример 1.

Решите неравенство:

а) $5x^2 - 7x + 2 > 0$; в) $x^2 - 4x + 4 > 0$; д) $2x^2 + x + 1 \geqslant 0$;

б) $2x^2 - 7x - 1 < 0$; г) $-x^2 + 8x - 16 \geqslant 0$; е) $-3x^2 - x - 2 > 0$.

Решение:

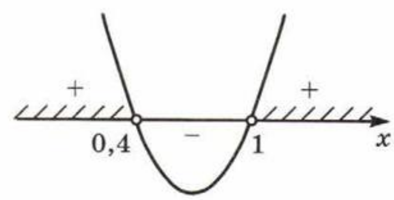
а) $5x^2 - 7x + 2 > 0$.

$D = (-7)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = 9$, $D > 0$.

Найдем корни квадратного трехчлена:

$x_1 = \dfrac{7-3}{10} = 0{,}4$; $x_2 = \dfrac{7+3}{10} = 1$.

Ответ: $x \in (-\infty; 0{,}4) \cup (1; +\infty)$.



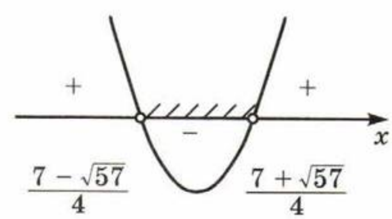
б) $2x^2 - 7x - 1 < 0$.

$D = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 57$, $D > 0$.

Найдем корни квадратного трехчлена:

$x_1 = \dfrac{7-\sqrt{57}}{4}$; $x_2 = \dfrac{7+\sqrt{57}}{4}$.

Ответ: $x \in \left(\dfrac{7-\sqrt{57}}{4}; \dfrac{7+\sqrt{57}}{4}\right)$.

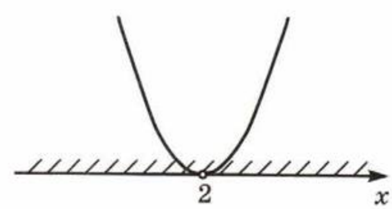


в) $x^2 - 4x + 4 > 0$.

$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$.

Найдем корень квадратного трехчлена: $x = 2$.

Ответ: $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.



г) $-x^2 + 8x - 16 \geqslant 0$.

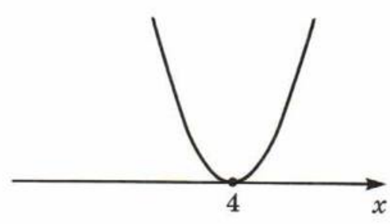
Умножим обе части неравенства на (-1):

$-x^2 + 8x - 16 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 \leqslant 0$.

$D = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 0$.

Найдем корень квадратного трехчлена: $x = 4$.

Неравенство нестрогое, поэтому ему удовлетворяет значение $x = 4$, при котором функция равна нулю.

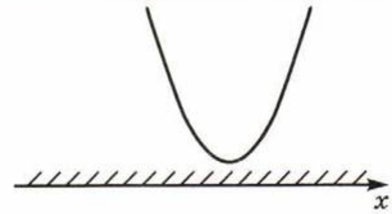


Ответ: 4.

д) $2x^2 + x + 1 \geqslant 0$.
$D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -7$, $D < 0$.

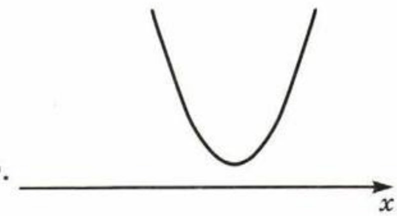
Все точки параболы лежат выше оси x, поэтому неравенству удовлетворяет любое действительное число.

Ответ: $x \in (-\infty; +\infty)$.



е) $-3x^2 - x - 2 > 0$.
Умножим обе части неравенства на (-1):
$-3x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow 3x^2 + x + 2 < 0$.
$D = 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = -23$, $D < 0$.
Так как все точки параболы лежат выше оси x, то значений x, удовлетворяющих знаку неравенства, нет.

Ответ: $\varnothing$.



Примечание. Среди рассмотренных нами примеров было два неравенства с отрицательным старшим коэффициентом. Вообще говоря, такие неравенства можно решать и непосредственно, то есть изображая схематически параболу, ветви которой направлены вниз. Например, на рис. 2 изображен график, полученный при $D > 0$. Если x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена ($x_1 < x_2$), то, например, решение неравенства $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ будет иметь вид $x \in [x_1; x_2]$.

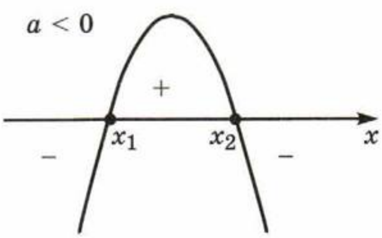


Рис. 2

Вернемся к нашей задаче 1. Помня, что по условию задачи $x > 0$, мы выбираем только положительную часть полученного интервала, то есть фактически решаем систему неравенств

$$\begin{cases} 2x^2 + 17x - 55 < 0 \\ x > 0 \end{cases}.$$

Решением системы будет являться пересечение множеств решений каждого из двух данных неравенств: $(-11; 2{,}5) \cap (0; +\infty) = (0; 2{,}5)$.

Ответ: длина стороны квадрата может быть равна любому числу, большему нуля, но меньшему 2,5 см.

Пример 2. Решить систему неравенств:

а) $\begin{cases} 2x^2 - 3x > -1 \\ 5x - 1 \leqslant 2x + 8 \end{cases}$;   б) $\begin{cases} x^2 + 4x - 3 > 0 \\ x^2 + 4x - 5 \leqslant 0 \end{cases}$.

Решение:

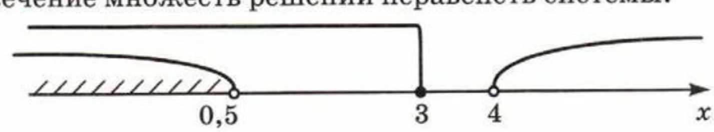
а) $\begin{cases} 2x^2 - 3x > -1 \\ 5x - 1 \leqslant 2x + 8 \end{cases}$.

Решим первое неравенство $2x^2 - 3x + 1 > 0$. $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1$, $D > 0$.

Корни квадратного трехчлена: $x_1 = 0{,}5$; $x_2 = 1$. Следовательно, решением данного неравенства является множество значений $x \in (-\infty; 0{,}5) \cup (4; +\infty)$.

Второе неравенство сводится к линейному: $3x \leqslant 9$. Его решением является $x \in (-\infty; 3]$.

Найдем пересечение множеств решений неравенств системы:



Ответ: $x \in (-\infty; 0{,}5)$.

б) $\begin{cases} x^2+4x-3>0 \\ x^2+4x-5\leqslant 0 \end{cases}$.

Решим первое неравенство $x^2 + 4x - 3 > 0$. $D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 28$, $D > 0$.

Корни квадратного трехчлена: $x_1 = -2 - \sqrt{7}$; $x_2 = -2 + \sqrt{7}$.

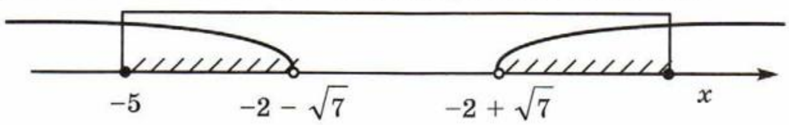
Множество решений данного неравенства: $x \in (-\infty; -2 - \sqrt{7}) \cup (-2 + \sqrt{7}; +\infty)$.

Решим второе неравенство $x^2 + 4x - 5 \leqslant 0$. $D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 36$, $D > 0$.

Корни квадратного трехчлена $x_1 = -5$; $x_2 = 1$. Множество решений второго неравенства $x \in [-5; 1]$.

Так как $2 < \sqrt{7} < 3$, то число $-2 - \sqrt{7} \in (-5; -4)$, а число $-2 + \sqrt{7} \in (0; 1)$.

Найдем пересечение множеств решений неравенств системы:



Ответ: $x \in [-5; -2 - \sqrt{7}) \cup (-2 + \sqrt{7}; 1]$.

* * *

Пример 3.

Решить систему неравенств: $\begin{cases} x^2+12\geqslant 8|x| \\ x^2+7x-8<0 \\ x^2+11x+18\leqslant 0 \end{cases}$.

Решение:

1) Первое неравенство системы приводится к виду $x^2 - 8|x| + 12 \geqslant 0$.

После замены $|x| = t$ неравенство примет вид $t^2 - 8t + 12 \geqslant 0$. Корни квадратного трехчлена $t_1 = 2$, $t_2 = 6$. Решение этого неравенства $t \in (-\infty; 2] \cup [6; +\infty)$.

Так как $t = |x|$, то t может принимать только неотрицательные значения. Отбрасывая из полученного множества отрицательные числа, получим, что $t \in [0;2] \cup [6;+\infty)$.

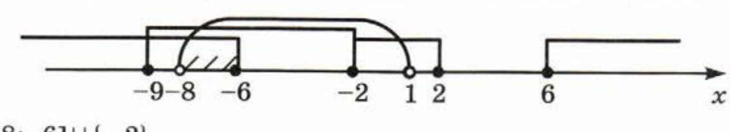
Вернемся к неизвестному x:

$|x| \in [0; 2] \cup [6; +\infty)$, значит, $x \in (-\infty; -6] \cup [-2; 2] \cup [6; +\infty]$.

2) Решим второе неравенство. Корни квадратного трехчлена $x_1 = -8$; $x_2 = 1$. Множество решений второго неравенства $x \in (-8; 1)$.

3) Решим третье неравенство системы. Корни квадратного трехчлена $x_1 = -9$; $x_2 = -2$. Множество решений третьего неравенства $x \in [-9; -2]$.

Найдем пересечение трех полученных множеств и запишем множество решений системы:



Ответ: $x \in (-8;-6] \cup \{-2\}$.

К **495** Решите неравенства:

а) $7x + 14 > 0$; б) $2x - 1 < 0$; в) $-4x + 4 > 0$; г) $-8x - 2 \geqslant 0$.

Вспомните, как называются данные неравенства?

Предположите, какие неравенства называют квадратными? Проверьте свое предположение по учебнику. Какое утверждение поможет это сделать?

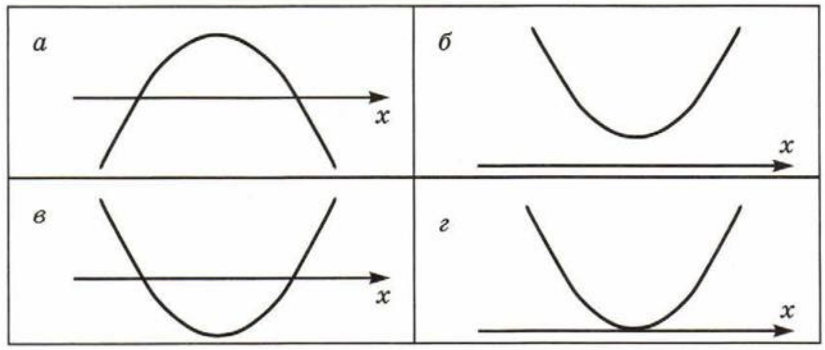
496 От чего зависит расположение параболы относительно оси абсцисс? Установите соответствие между квадратичными функциями и схематичными изображениями их графиков:

1) $y = x^2 - x + 3$;

2) $y = -x^2 - x + 2$;

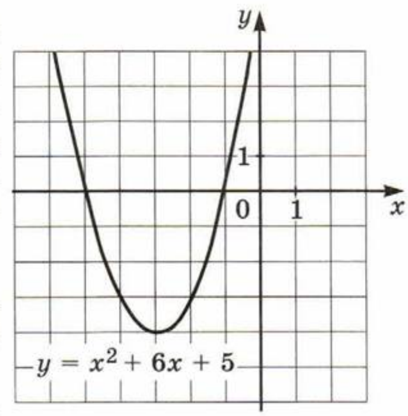
3) $y = x^2 - 8x + 15$;

4) $y = x^2 + 2x + 1$.



497 1) Вычислите абсциссы точек пересечения функции $y = x^2 + 6x + 5$ с осью абсцисс. Проверьте свой результат по графику данной функции, изображенному на рисунке.

2) Пользуясь графиком, укажите все значения x, при которых квадратичная функция $y = x^2 + 6x + 5$ принимает отрицательные значения, принимает положительные значения.



498 1) Решите квадратное неравенство $x^2 + 6x + 5 < 0$. Переформулируйте задание, сведя его к применению известного вам алгоритма.

2) Предложите свой способ решения квадратного неравенства $x^2 - 8x + 16 > 0$. Как можно его упростить?

3) Составьте алгоритм решения квадратных неравенств. Сопоставьте свой вариант с предложенным на стр. 135.

499 Решите квадратные неравенства:

1. а) $3x^2 - 2x - 8 \geqslant 0$; в) $5x^2 + x + 3 > 0$; д) $9x^2 - 12x + 4 \geqslant 0$;
   б) $x^2 - 8x + 15 \leqslant 0$; г) $11x^2 + 5x + 1 \leqslant 0$; е) $x^2 - 6x + 9 < 0$.
2. а) $-3x^2 + 7x - 2 < 0$; в) $-4x^2 - 4x - 1 > 0$; д) $-5x^2 + 3x \geqslant 0$;
   б) $-x^2 + 6x - 8 \leqslant 0$; г) $-x^2 - x + 2 > 0$; е) $-x^2 - x < 0$.

500 Решите неполные квадратные неравенства:

а) $-8x^2 \geqslant 0$; в) $5x^2 + 2 \geqslant 0$; д) $-12x^2 - 7 > 0$;

б) $4x^2 - 9 > 0$; г) $-9x^2 + 1 \leqslant 0$; е) $-15x^2 + 25 \geqslant 0$.

Каким еще способом можно решить подобные неполные квадратные неравенства?

501 Найдите значения x, при которых данное выражение имеет смысл:

а) $\sqrt{x^2 - 9x}$; в) $\sqrt{x^2 - 16}$; д) $\sqrt{x^2 + 8x + 7}$; ж) $\sqrt{-x^2 - 16x - 64}$;

б) $\sqrt{7x - 2x^2}$; г) $\sqrt{x^2 + 5}$; е) $\sqrt{-x^2 - 2x + 3}$; з) $\sqrt{100x^2 - 60x + 9}$.

502 Найдите наибольшее целое значение аргумента области определения функции $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{-2x^2+7x-3}}$.

503 Составьте из неравенств: $2x^2-7x+5>0$; $x^2+4x-21\leqslant 0$; $-3x^2+2x-1<0$ и $x^2+9\leqslant 0$ все возможные системы двух неравенств и решите их.

П **504** Найдите наибольшее и наименьшее значения квадратного трехчлена на заданном числовом промежутке. Заполните таблицу.

№	Квадратный трехчлен	Числовой промежуток	Наибольшее значение	Искомое слово	Наименьшее значение	Искомое слово
1	$-x^2+4$	$[-1; 1]$		Р		К
2	x^2+6x-7	$[-7; -2]$		К		Т
3	x^2+x+5	$[0; 1]$		С		И
4	$-2x^2-8x$	$[-2; 2]$		Т		Ь
5	$-3x^2+1{,}5x-6$	$\left[\frac{1}{2}; 1\right]$		Б		О
6	$3+x^2$	$\left[-5; -\frac{1}{2}\right]$		Е		С
7	$\frac{1}{2}x^2-3x-3{,}5$	$[0; 8]$		Ы		С
8	$5x+x^2$	$[-4; -2]$		Е		Н
9	$25-10x+x^2$	$[1; 10]$		И		Р
10	x^2-3x+2	$[1; 3]$		О		Е
11	$-4x^2-2x-1$	$\left[0; \frac{1}{2}\right]$		С		Н

Расположив наибольшие значения квадратных трехчленов в порядке возрастания, а наименьшие – в порядке убывания, прочитайте два понятия. Связаны ли они с понятием дружба?

505 Дана функция

$$f(x)=\begin{cases}2x-1, \text{ если } x>1;\\ x^3, \text{ если } 0\leqslant x\leqslant 1;\\ h(x), \text{ если } x<0\end{cases}$$

Задайте $h(x)$ так, чтобы функция $f(x)$ являлась нечетной, и постройте график функции $f(x)$.

506 Найдите область определения функции:

а) $f(x)=\sqrt{2x+9}$;

б) $f(x)=\sqrt{2x-14}$;

в) $f(x)=\sqrt{8-0{,}5x}$;

г) $f(x)=\sqrt{-12-5x}$;

д) $f(x)=\dfrac{5}{\sqrt{6-x}}$;

е) $f(x)=\dfrac{5}{\sqrt{2x-4}}$;

ж) $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{x}$;

з) $f(x)=\sqrt{-x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Д **507** Решите квадратные неравенства:

а) $4x^2+20x+25\leqslant 0$;

б) $2x^2+x+1<0$;

в) $3x^2-5x+2>0$;

г) $5x^2+3x\geqslant 0$;

д) $2x^2+7x-4>0$;

е) $x^2-3x+9>0$.

508 Решите квадратные неравенства:

а) $-2x^2+x-1<0$;

б) $-x^2+4x-4\geqslant 0$;

в) $-3x^2+x>0$;

г) $-5x^2-4x+1<0$;

д) $-2x^2+7x-5\leqslant 0$;

е) $-x^2-5x-7>0$.

509 Решите неполные квадратные неравенства:

а) $2x^2>0$;

б) $6x^2-6<0$;

в) $-63x^2+7<0$;

г) $3x^2-2<0$;

д) $11x^2+3>0$;

е) $-x^2-4<0$.

510 Найдите значения x, при которых данное выражение имеет смысл:

а) $\sqrt{x^2-x}$;

б) $\sqrt{x^2+5x+6}$.

511 Найдите наименьшее целое значение аргумента области определения функции $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{-x^2+2x+15}}$.

512 Дана функция $f(x)=\begin{cases} x^2, \text{ если } x\geqslant 2; \\ 2x+1, \text{ если } 0\leqslant x<2; \\ h(x), \text{ если } x<0 \end{cases}$

Задайте $h(x)$ так, чтобы функция $f(x)$ являлась четной, и постройте график функции $f(x)$.

С **513*** Каких пятизначных чисел больше: тех, у которых цифры идут в строго возрастающем порядке, или тех, у которых цифры идут в строго убывающем порядке? (Например, в первую группу входит число 12 459, но не входят числа 12 495 и 12 259.)

514* По кругу висят 250 лампочек. Вначале все лампочки включены. Разрешается либо переключить (из включенного состояния в выключенное, или наоборот) любые 4 последовательные лампочки, либо взять 5 последовательных лампочек и переключить все, кроме средней. Можно ли с помощью таких операций выключить все лампочки?

2*. Решение квадратных неравенств с параметром

Нет ни одной области математики, как бы она абстрактна ни была, которая когда-нибудь не окажется применимой к явлениям действительного мира.

Н. И. Лобачевский (1792–1856),
русский математик

В этой главе мы уже научились решать *уравнения с параметрами*. Однако в ходе исследования различных процессов, описывающих реальный мир, встречаются и неравенства, в которых коэффициенты могут принимать различные значения. Обозначая эти коэффициенты буквами, мы будем получать *неравенства с параметрами*. Работать с такими неравенствами мы и будем учиться в данном пункте.

Определение 1. Неравенство, в котором некоторые коэффициенты заданы буквами или буквенными выражениями, называется **неравенством с параметрами.**

Так, неравенство $2ax - 4 \geqslant 0$ является линейным неравенством с параметром a, а неравенство $bx^2 + 2x + 1 < 0$ – квадратным[3] неравенством с параметром b.

Как и уравнение, неравенство с параметром, в зависимости от значения параметра, может изменять свой вид и решение. Например, неравенство $bx^2 + 2x + 1 < 0$ при $b = 0$ становится линейным неравенством $2x + 1 < 0$, и имеет решение $x \in (-\infty; -0{,}5)$. При $b = 1$ оно преобразуется в неравенство $x^2 + 2x + 1 < 0$, множество решений которого пусто. А при $b = -3$ то же самое неравенство принимает вид $-3x^2 + 2x + 1 < 0$, и его решением служит уже объединение лучей $\left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$.

Рассмотрим задания, в которых требуется выяснить, *при каких значениях параметров неравенство обладает тем или иным свойством*, например не имеет решений, имеет одно решение, его решением служит любое действительное число и т. д. Как и для уравнений с параметром, мы должны будем каждый раз четко указывать, при каком значении параметра требуемое условие выполняется. Вначале рассмотрим более простые виды таких заданий.

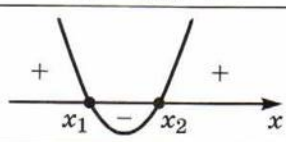
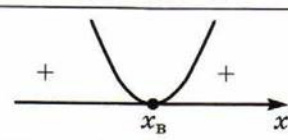
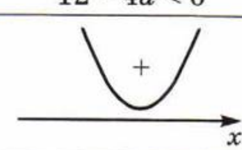
Пример 1.

При каких значениях параметра a решением неравенства $x^2 - 4x + a + 1 > 0$ является любое действительное число?

Решение:

Вычислим дискриминант трехчлена: $D = (-4)^2 - 4(a + 1) = 16 - 4a - 4 = 12 - 4a$.

Мы знаем, что в зависимости от результата сравнения дискриминанта с нулем, возможны три случая расположения графика $y = x^2 - x + a + 1$.

$12 - 4a > 0$	$12 - 4a = 0$	$12 - 4a < 0$
		

[3] Строго говоря, оно является неравенством с параметром не выше второй степени.

Нам нужно указать такие значения параметра a, при которых неравенство выполняется при всех x. Значит, нужно выбрать тот случай, где все точки параболы лежат выше оси x. Это происходит, если квадратный трехчлен в левой части неравенства не имеет корней, то есть если его дискриминант отрицательный.

Таким образом, мы приходим к необходимости решить линейное неравенство относительно a:

$$12-4a < 0 \Leftrightarrow -4a < -12 \Leftrightarrow a > 3.$$

Ответ: при $a \in (3; +\infty)$.

Пример 2.

При каких значениях параметра a неравенство $-x^2 + (a+2)x - 8a - 1 > 0$ имеет хотя бы одно решение?

Решение:

Приведем данное неравенство к положительному коэффициенту при x^2.

$$-x^2 + (a+2)x - 8a - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 - (a+2)x + 8a + 1 < 0$$

Вычислим дискриминант: $D = (a+2)^2 - 4(8a+1) = a^2 + 4a + 4 - 32a - 4 = a^2 - 28a$.

Чтобы данное неравенство имело решение, необходимо, чтобы хотя бы одна точка параболы лежала ниже оси x. Так как ветви параболы направлены вверх, то для этого нужно, чтобы квадратный трехчлен в левой части неравенства имел два корня, то есть его дискриминант был положительным.

Мы приходим к необходимости решить квадратное неравенство $a^2 - 28a > 0$.

Квадратный трехчлен $a^2 - 28a$ имеет 2 корня: $a_1 = 0$, $a_2 = 28$. Поэтому неравенству $a^2 - 28a > 0$ удовлетворяют промежутки $(-\infty; 0) \cup (28; +\infty)$.

Ответ: при $a \in (-\infty; 0) \cup (28; +\infty)$.

Ясно, что при решении неравенств с параметром может ставиться и более общая задача: *решить неравенство* при всех допустимых значениях параметра a.

Определение 2. **Решить неравенство с неизвестным x и параметром a** – это значит, для всех возможных допустимых значений параметра a найти множество значений x, удовлетворяющих этому неравенству.

Пример 3.

Решить неравенство $x^2 - (2k+1)x + 4 \leqslant 0$ с параметром k.

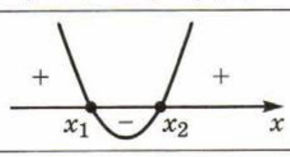
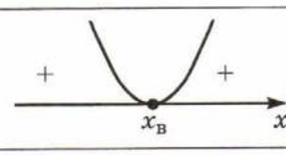
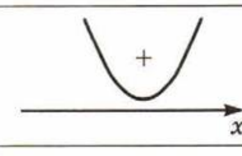
Решение:

Вычислим дискриминант квадратного трехчлена в левой части неравенства

$$D = (2k+1)^2 - 4 \cdot 4 = 4k^2 + 4k + 1 - 16 = 4k^2 + 4k - 15.$$

Полученный квадратный трехчлен $4k^2 + 4k - 15$ имеет 2 корня: $k_2 = -2{,}5$, $k_2 = 1{,}5$.

Рассматривая отдельно случаи $D > 0$, $D = 0$ и $D < 0$, найдем значения параметра, при которых парабола $y = x^2 - (2k+1)x + 4$ пересекает ось x в двух точках, касается ее в своей вершине или расположена выше оси x.

1. $D > 0$	2. $D = 0$	3. $D < 0$
$4k^2 + 4k - 15 > 0$ $k \in (-\infty; -2{,}5) \cup (1{,}5; +\infty)$	$4k^2 + 4k - 15 = 0$ $k = -2{,}5$ или $k = 1{,}5$	$4k^2 + 4k - 15 < 0$ $k \in (-2{,}5; 1{,}5)$.
		

Теперь решим неравенство $x^2 - (2k + 1)\,x + 4 \leqslant 0$ отдельно для всех найденных интервалов, а также при значениях $k = -2{,}5$ и $k = 1{,}5$.

Для удобства результаты, полученные для каждого случая, будем отмечать на числовой прямой по параметру k:

1. $\underline{k \in (-\infty;\ -2{,}5) \cup (1{,}5;\ +\infty)}$.

Так как $D > 0$, то квадратный трехчлен имеет два корня:

$$x_1 = \frac{2k+1-\sqrt{4k^2+4k-15}}{2}, \qquad x_2 = \frac{2k+1+\sqrt{4k^2+4k-15}}{2}.$$

Знаку неравенства удовлетворяет отрезок, на котором функция неположительна:

$$x \in \left[\frac{2k+1-\sqrt{4k^2+4k-15}}{2};\ \frac{2k+1+\sqrt{4k^2+4k-15}}{2}\right]$$

2. $\underline{k = -2{,}5 \text{ или } k = 1{,}5}$.

Так как $D = 0$, то квадратный трехчлен имеет единственный корень $x_в$, который является единственным решением неравенства.

Если $k = -2{,}5$, то квадратный трехчлен имеет вид $x^2 + 4x + 4$ и $x = -\dfrac{b}{2a} = -2$.

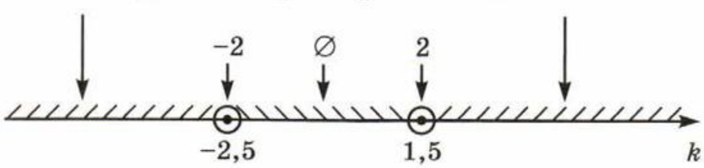
Если $k = 1{,}5$, то квадратный трехчлен имеет вид $x^2 - 4x + 4$ и $x = -\dfrac{b}{2a} = 2$.

3. $\underline{k \in (-2{,}5;\ 1{,}5)}$.

Так как ветви параболы направлены вверх и $D < 0$, то квадратный трехчлен положителен при всех значениях x. Значит, при данных значениях параметра неравенство не имеет решения.

Таким образом, в ходе решения вспомогательная числовая прямая по параметру k приняла вид:

$$\left[\frac{2k+1-\sqrt{4k^2+4k-15}}{2};\ \frac{2k+1+\sqrt{4k^2+4k-15}}{2}\right] \qquad \left[\frac{2k+1-\sqrt{4k^2+4k-15}}{2};\ \frac{2k+1+\sqrt{4k^2+4k-15}}{2}\right]$$



Ответ:

если $k \in (-\infty;\ -2{,}5) \cup (1{,}5;\ +\infty)$,

то $x \in \left[\dfrac{2k+1-\sqrt{4k^2+4k-15}}{2};\ \dfrac{2k+1+\sqrt{4k^2+4k-15}}{2}\right]$;

если $k = -2{,}5$, то неравенство имеет единственное решение $x = -2$;

если $k = 1{,}5$, то неравенство имеет единственное решение $x = 2$;

если $k \in (-2{,}5;\ 1{,}5)$, то решений нет.

Мы рассмотрели более простой тип неравенств с параметрами, когда коэффициент при x^2 не содержит параметр. В этом случае, мы, как и раньше, можем сделать этот коэффициент положительным и свести решение задачи к исследованию знака дискриминанта.

Алгоритм решения квадратного неравенства с параметром (коэффициент при x^2 не содержит параметр)

1. Вычислить дискриминант квадратного трехчлена, стоящего в левой части неравенства.

2. Указать значения параметра, при которых:

- $D > 0$, найти решение неравенства при этих значениях параметра;
- $D = 0$, найти решение неравенства при этих значениях параметра;
- $D < 0$, найти решение неравенства при этих значениях параметра.

3. Записать ответ, указывая соответствие между всеми значениями параметра и решением неравенства.

* * *

Перейдем к более сложному типу квадратных неравенств, когда коэффициент при x^2 содержит параметр. Понятно, что при решении подобных неравенств учитывать нужно не только *значение дискриминанта*, но и *знак* коэффициента при x^2. Ведь в зависимости от того, положителен он или отрицателен, ветви параболы будут направлены вверх или вниз.

Кроме того, как и в уравнениях с параметром, в неравенствах нам нужно будет отдельно разбираться со случаем, когда коэффициент при x^2 обращается в нуль (тогда неравенство вырождается в линейное).

Пример 4.

Выяснить, при каких значениях параметра a неравенство $ax^2 + 4ax + 5 \leqslant 0$ не имеет решений?

Решение:

1. Если $a = 0$, то данное неравенство вырождается в неравенство $0 \cdot x \leqslant -5$, которое не имеет решений. Поэтому, значение параметра $a = 0$ удовлетворяет условию задачи и мы запишем его в ответ.

2. Если $a > 0$, то графиком квадратного трехчлена в левой части неравенства является парабола с ветвями, ветви которой направлены вверх.

Вычислим $D_1 = 4a^2 - 5a$ (по формуле четного коэффициента).

Неравенство не имеет решений, если парабола расположена выше оси абсцисс, то есть когда квадратный трехчлен не имеет корней ($D_1 < 0$).

Решим соответствующее неравенство $4a^2 - 5a < 0$.

Корнями квадратного трехчлена $4a^2 - 5a$ являются числа $a_1 = 0$ и $a_2 = \frac{5}{4}$, поэтому $D_1 < 0$ при $0 < a < \frac{5}{4}$.

Мы рассматриваем случай положительных значений a, значит, все числа из найденного нами промежутка подходят: $a \in \left(0; \frac{5}{4}\right)$.

3. Если $a < 0$, то графиком квадратного трехчлена в левой части неравенства является парабола с ветвями, направленными вниз. Значит, обязательно найдутся значения x, при которых трехчлен будет отрицательным – то есть неравенство будет иметь решение.

Следовательно, все значения $a < 0$ не подходят.

Ответ: $a \in \left[0; \frac{5}{4}\right)$.

Таким образом, если коэффициент при x^2 содержит параметр, то при решении квадратных неравенств следует отдельно рассмотреть 3 случая – когда коэффициент при x^2 *равен нулю*, *больше нуля* и *меньше нуля*. Поэтому установленный выше алгоритм решения квадратного неравенства с параметром для этого случая принимает следующий вид.

Алгоритм решения квадратного неравенства с параметром
(коэффициент при x^2 содержит параметр)

1. Найти «особенные» значения параметра (когда коэффициент при x^2 равен 0) и решить неравенство при этих значениях параметра.
2. Вычислить дискриминант квадратного трёхчлена, стоящего в левой части неравенства.
3. Решить неравенство, когда коэффициент при x^2 положителен, находя значения параметра, при которых $D > 0$, $D = 0$, $D < 0$, и соответствующие им решения неравенства.
4. Решить неравенство, когда коэффициент при x^2 отрицателен, находя значения параметра, при которых $D > 0$, $D = 0$, $D < 0$, и соответствующие им решения неравенства.
5. Записать ответ, указывая соответствие между всеми значениями параметра и решением неравенства.

Пример 5.

Решить неравенство $bx^2 + (2b + 3)x + b - 1 \geqslant 0$ при всех возможных значениях b.

Решение:

Обозначим исходное неравенство $bx^2 + (2b + 3)x + b - 1 \geqslant 0$ (1).

1. Если $b = 0$, то неравенство (1) вырождается в линейное неравенство $3x - 1 \geqslant 0$, решением которого является множество значений $x \in \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

2. Если $b \neq 0$ неравенство (1) – квадратное. Вычислим дискриминант трехчлена:

$$D = (2b + 3)^2 - 4b(b - 1) = 4b^2 + 12b + 9 - 4b^2 + 4b = 16b + 9.$$

3. Если $b > 0$, то $D = 16b + 9 > 0$, поэтому два остальных варианта $D = 0$ и $D < 0$ рассматривать не нужно.

Квадратный трехчлен в левой части неравенства (1) имеет два корня:

$x_1 = \dfrac{-2b-3-\sqrt{16b+9}}{2b}$, $x_2 = \dfrac{-2b-3+\sqrt{16b+9}}{2b}$, причем при $b > 0$ имеем $x_1 < x_2$.

Значит, $x \in \left(-\infty; \dfrac{-2b-3-\sqrt{16b+9}}{2b}\right] \cup \left[\dfrac{-2b-3+\sqrt{16b+9}}{2b}; +\infty\right)$.

4. Если $b < 0$, то дискриминант D может принимать значения разных знаков.

• $D > 0$

$16b + 9 > 0 \Leftrightarrow b > -\dfrac{9}{16}$. Учитывая, что $b < 0$, значения параметра $b \in (-\dfrac{9}{16}; 0)$.

Квадратный трехчлен в левой части неравенства (1) имеет два корня x_1 и x_2, но теперь $x_1 > x_2$. Значит, $x \in \left[\dfrac{-2b-3+\sqrt{16b+9}}{2b}; \dfrac{-2b-3-\sqrt{16b+9}}{2b}\right]$.

• $D = 0$

$16b + 9 = 0 \Leftrightarrow b = -\dfrac{9}{16}$. Следовательно, квадратный трехчлен имеет единственный корень $x = \dfrac{-2b-3}{2b} = -1 - \dfrac{3}{2b} = \dfrac{5}{3}$.

Ветви параболы направлены вниз, а вершина имеет координаты $\left(\dfrac{5}{3}; 0\right)$. Поэтому решением неравенства (1) является единственное число $x = \dfrac{5}{3}$.

• $D < 0$

$16b + 9 < 0 \Leftrightarrow b < -\dfrac{9}{16}$. Значит, при $b \in \left(-\infty; -\dfrac{9}{16}\right)$ квадратный трехчлен не имеет корней и парабола с ветвями, направленными вниз, расположена целиком ниже оси абсцисс. Следовательно, неравенство (1) не имеет решений.

Ответ:

если $b \in \left(-\infty; -\frac{9}{16}\right)$, то решений нет;

если $b = -\frac{9}{16}$, то неравенство имеет единственное решение $x = \frac{5}{3}$;

если $b \in \left(-\frac{9}{16}; 0\right)$, то $x \in \left[\frac{-2b-3+\sqrt{16b+9}}{2b}; \frac{-2b-3-\sqrt{16b+9}}{2b}\right]$;

если $b = 0$, то $x \in [\frac{1}{3}; +\infty)$;

если $b \in (0; +\infty)$, то $x \in \left(-\infty; \frac{-2b-3-\sqrt{16b+9}}{2b}\right] \cup \left[\frac{-2b-3+\sqrt{16b+9}}{2b}; +\infty\right)$.

К **515** Разбейте неравенства на две группы:

а) $2x^2 + x + p > 0$; в) $7x^2 + 0{,}2x - 1 \geqslant 0$; д) $2x^2 + ax + 1 < 0$;

б) $4x^2 + x - 9 \leqslant 0$; г) $x^2 + 2x + 1 > 0$; е) $kx^2 + x + (k+2) \leqslant 0$.

Какое название вы бы предложили для неравенств, коэффициенты которых заданы буквами или буквенными выражениями? Сравните свой вариант с общепринятым на стр. 141.

516 Прочитайте данные неравенства и ответьте на следующие вопросы:

а) $x^2 - 2x + 1 > 0$; б) $x^2 - 2x + 0{,}75 > 0$; в) $x^2 - 2x + 3 > 0$; г) $x^2 - 2x + k > 0$.

1) Чем отличаются данные неравенства? Какое из этих неравенств является неравенством с параметром?

2) Вычислите дискриминант для каждого из этих неравенств. Как его значение влияет на расположение параболы? Можно ли определить расположение параболы относительно оси абсцисс в последнем неравенстве?

3) При каких значениях параметра k парабола $y = x^2 - 2x + k$ пересекает ось абсцисс в двух точках? Какое решение имеет неравенство в этом случае?

4) При каких значениях параметра k парабола $y = x^2 - 2x + k$ имеет одну общую точку с осью абсцисс? Какое решение имеет неравенство в этом случае?

5) При каких значениях параметра k парабола $y = x^2 - 2x + k$ не имеет общих точек с осью абсцисс? Какое решение имеет неравенство в этом случае?

6) Сделайте вывод о способе решения квадратного неравенства с параметром (коэффициент при x^2 не содержит параметр) и примените его для решения неравенства $x^2 - 2x + k \leqslant 0$. Сопоставьте свой способ с алгоритмом на стр. 144.

517 При каких значениях параметра a решением неравенства $x^2 - ax + 1 > 0$ является любое действительное число?

518 При каких значениях параметра a неравенство $-2x^2 + (a+2)x - 1 \geqslant 0$ имеет хотя бы одно решение?

519 При каких значениях параметра a неравенство $2x^2 + (a+2)x + 1 > 0$ не имеет решений?

520 При каких значениях параметра a неравенство $ax^2 - 2x - 1 < 0$ не имеет решений?

521 Решите неравенство $x^2 - 2x + (1+k) < 0$ с параметром k.

П **522** Решите квадратные неравенства:

а) $10x^2 + 7x + 1 > 0$;

б) $-x^2 + 10x - 25 \geqslant 0$;

в) $x^2 - 2x \geqslant 0$;

г) $x^2 - 14x + 45 < 0$;

д) $-5x^2 + 3x + 2 \leqslant 0$;

е) $10 - 2x^2 > 0$.

Найдите сумму их наименьших целых неотрицательных решений. Запишите все делители полученного числа и три числа, кратных ему.

523 Решите системы неравенств:

а) $\begin{cases} x^2+2x-3 \leqslant 0 \\ 2x+8>0 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x^2+x+3<0 \\ -x+1>0 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 3x^2-4x+7>0 \\ -2x-3>0 \end{cases}$;

г) $\begin{cases} -16x^2+8x-1 \geqslant 0 \\ -3x+6>0 \end{cases}$.

524 а) На встрече друзей все выпили по полной чашке кофе с молоком. При этом Максим выпил четверть всего молока и шестую часть всего кофе. Сколько друзей пришло на встречу?

б) У Маши была коробка с арахисом в шоколаде. Она съела одна некоторое количество этих конфет, а потом к ней в гости пришла подруга Света, и оставшиеся конфеты они разделили поровну. Оказалось, что Маша съела в пять раз больше конфет, чем Света. Какую долю от всех конфет Маша успела съесть до прихода Светы?

Д **525** При каких значениях параметра a неравенство $ax^2 + ax + 3 < 0$ имеет хотя бы одно решение?

526 Решите неравенство $kx^2 - 6x + 9 \geqslant 0$ с параметром k.

527 С понедельника по пятницу сборщик винограда собирал с участка урожай винограда. В выходные к нему на помощь приехали два сына. За выходные они закончили сбор урожая, причем части, собранные каждым из них за эти дни, оказались равными. Какую часть урожая успел убрать отец до приезда сыновей, если он убрал в 4 раза больше винограда, чем его сыновья?

С **528*** Найдите все значения параметра a, при которых все решения неравенства $x^2 - 2(a+4)x + 4a + 13 \leqslant 0$ являются решениями неравенства $x^2 + 4|x| - 5 \leqslant 0$.

529* Найдите все значения параметра a, при которых любое решение неравенства $x^2 - 3x + 2 < 0$ является также решением неравенства $ax^2 - (3a+1)x + 3 > 0$.

530* Вдоль дороги растут 2002 ели. Утром на каждой из них сидело по одной вороне. В полдень каждая ворона взлетела и перелетела на дерево, растущее через одно от того, с которого она взлетела. Могло ли так получиться, чтобы на каждой ели вновь сидело по одной вороне?

531* При каких значениях параметра a один из корней уравнения

$$(a^2 + a + 1)x^2 + (2a - 3)x + (a - 5) = 0$$

больше 1, а другой – меньше 1?

Экспресс-тест № 6

Примерное время выполнения – 35 минут

Часть А

№ 1

№ 1. Квадратичная функция задана графически (рис.1). Определите знаки коэффициента a и дискриминанта D соответствующего квадратного трехчлена:

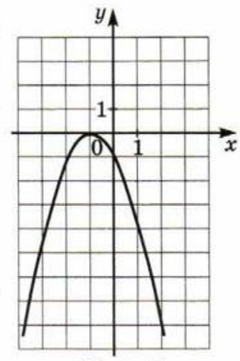


Рис. 1

А) $D < 0,\ a < 0$; Б) $D = 0,\ a > 0$;

В) $D > 0,\ a > 0$; Г) $D = 0,\ a < 0$.

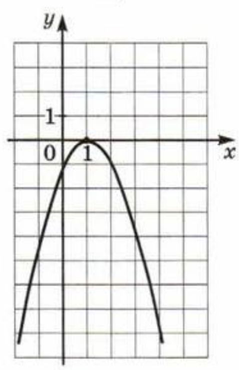
№ 2			
1	2	3	4

№ 2. Установите соответствие между квадратичной функцией и ее графиком.

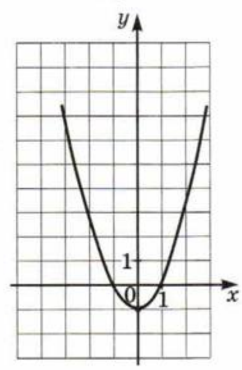
1) $y = -(x-1)^2 + 1$; 2) $y = (x+1)^2 + 1$;

3) $y = -(x-1)^2$; 4) $y = x^2 - 1$.

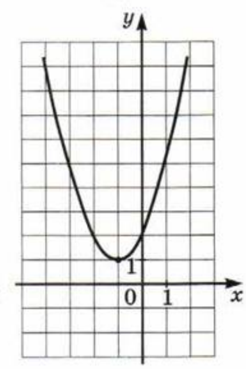
А)



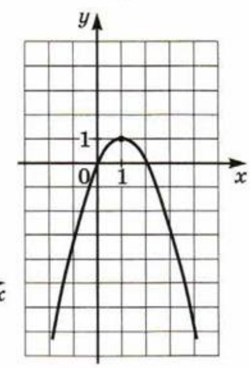
Б)



В)



Г)



№ 3

№ 3. Найдите координаты вершины параболы $y = 2x^2 + x - 15$:

А) $\left(-\dfrac{1}{4}; -15\dfrac{1}{8}\right)$; Б) $\left(\dfrac{1}{4}; -14\dfrac{5}{8}\right)$; В) $\left(-\dfrac{1}{2}; -15\right)$; Г) $(-1; -16)$.

№ 4

№ 4. Решите неравенство $5x^2 - 4x - 1 \geqslant 0$:

А) $(-\infty; +\infty)$; Б) $\left[-\dfrac{1}{5}; 1\right]$;

В) $\left(-\infty; -\dfrac{1}{5}\right) \cup (1; +\infty)$; Г) $(-\infty; -0{,}2] \cup [1; +\infty)$.

№ 5			
1	2	3	4

№ 5. Установите соответствие между наибольшим и наименьшим значениями квадратного трехчлена $-9x^2 + 10x - 1$ и числовым отрезком, на котором он их достигает:

1) $\left[\dfrac{5}{9}; 1\right]$; 2) $\left[\dfrac{1}{9}; \dfrac{4}{9}\right]$; 3) $[0; 2]$; 4) $[-1; 0]$.

А) $y_{\text{наиб}} = 1\dfrac{7}{9}$, $y_{\text{наим}} = -17$;

Б) $y_{\text{наиб}} = 1\dfrac{7}{9}$, $y_{\text{наим}} = 0$;

В) $y_{\text{наиб}} = -1$, $y_{\text{наим}} = -20$;

Г) $y_{\text{наиб}} = 1\dfrac{5}{9}$, $y_{\text{наим}} = 0$.

Часть B

№ 6

№ 6. Постройте график функции

$$y=\begin{cases}-x^2+6x-10, \text{ если } 2\leqslant x\leqslant 6;\\ -\frac{1}{2}x-1, \text{ если } -4\leqslant x<2\end{cases}$$

Сколько точек у построенного графика, значения функций в которых равны нулю?

А) 3; Б) 2;

В) 1; Г) 0.

№ 7

№ 7. Найдите наибольшее целое значение аргумента области определения функции $y=\frac{1}{\sqrt{-3x^2-13x+10}}$:

А) 1; Б) 0;

В) $-2\frac{1}{6}$; Г) $-24\frac{1}{12}$.

Часть C

(ход решения и ответ записываются на отдельном листе)

№ 8. При каких значениях параметра a неравенство $x^2+(a-5)x-(a-5)<0$ имеет хотя бы одно решение?

Ответы и решения к тесту:

№ 1	№ 2				№ 3	№ 4	№ 5				№ 6	№ 7
	1	*2*	*3*	*4*			*1*	*2*	*3*	*4*		
Г	*Г*	*В*	*А*	*Б*	*А*	*Г*	*Б*	*Г*	*А*	*В*	*В*	*Б*

№ 8

$D=(a-5)^2+4(a-5)=a^2-6a+5$

Чтобы данное неравенство имело одно решение, надо чтобы хотя бы одна точка графика была расположена ниже оси Ox.

Ветви параболы направлены вверх. Значит, квадратный трехчлен должен иметь два корня, то есть $D>0$.

Решая неравенство $a^2-6a+5>0$, получим, что $D>0$ при $a<1$ или при $a>5$

Ответ: $a\in(-\infty;1)\cup(5;+\infty)$.

Шкала успешности:

9–10 баллов – *отлично*
7–8 баллов – *хорошо*
5–6 баллов – *удовлетворительно*

Задачи для самоконтроля к Главе 4

532 Приведите уравнение

а) $(2x-3)(4x+1)=7x^2-6x+5$; б) $(5-x)^2-13=(2x+1)(1-2x)-10x$

к виду $ax^2+bx+c=0$ и запишите его коэффициенты.

533 Решите неполное квадратное уравнение:

а) $x^2+7x=0$; б) $x^2-196=0$; в) $x^2+225=0$; г) $3x^2=0$.

534 Определите количество корней квадратного уравнения:

а) $x^2+x-2=0$; б) $\frac{1}{8}x^2-3x+72=0$; в) $-0{,}4x^2+3x+15=0$; г) $-5x^2+2x-1=0$.

535 При каких значениях параметра a уравнение $x^2+(2a-1)x+a(a-3)=0$ имеет два корня? Запишите три целых значения a, при которых выполняется это условие.

536 При каких значениях параметра a уравнение $0{,}5x^2-ax+0{,}5a(a+1)=0$ не имеет корней? Запишите наименьшее целое значение a, при котором выполняется это условие.

537 Решите квадратное уравнение:

а) $2x^2+13x-7=0$; д) $5x^2-6\pi x+\pi^2=0$;

б) $12{,}5x^2-10x+2=0$; е) $-\frac{1}{2}x^2+x+1=0$;

в) $-2x^2+5x-3=0$; ж) $\frac{1}{8}x^2-\sqrt{6}x+8=0$;

г) $-x^2-\sqrt{5}x+11=0$; з) $(3-x)^2+2=x^2-(2x-3)(2x+3)$.

538 При каких значениях параметра a уравнение $x^2+ax-\frac{15}{16}+a=0$ имеет ровно один корень?

539 Один из корней квадратного уравнения $2x^2+8x+c=0$ равен 5. Используя теорему Виета, найдите свободный член c этого уравнения.

540 Один из корней квадратного уравнения $3x^2+bx-12=0$ равен 4. Используя теорему Виета, найдите второй коэффициент b этого уравнения.

541 Составьте квадратное уравнение, если его корни:

а) $x_1=\frac{5}{7}$; $x_2=-1\frac{2}{5}$; б) $x_1=-\frac{4}{11}$; $x_2=-5\frac{1}{2}$.

542 Пусть x_1, x_2 корни уравнения $0{,}5x^2-5x+11=0$. Найдите значение выражения $x_1^3+x_2^3$.

543 Пусть x_1, x_2 корни уравнения $x^2+\sqrt{2}x-2=0$. Найдите значение выражения $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$.

544 Решите уравнение, используя теорему, обратную теореме Виета:

а) $x^2-12x+20=0$; б) $x^2+4x-32=0$; в) $0{,}5x^2-1{,}5x-5=0$.

545 Если возможно, разложите квадратный трехчлен на множители:

а) $\frac{1}{7}x^2-2x+14$; в) $4x^2-3x-1$; д) x^2+4;

б) $16x^2-24x+9$; г) $-\frac{1}{5}x^2+3{,}2x-12$; е) $5x^2-3$.

546 Решите уравнение, сводящееся к квадратному:

а) $x^4 - 34x^2 + 225 = 0$; в) $\frac{1}{2}x^2 - \sqrt{5}|x| - 2 = 0$; д) $(x + 1)^4 - 12x^2 - 24x + 23 = 0$;

б) $7x^4 - 13x^2 - 2 = 0$; г) $x^2 - 13|x| + 12 = 0$; е) $(x^2 + x)^2 - 11x^2 = 11x + 12$.

547 Решите задачу:

а) Известно, что одна из сторон прямоугольника на 5 см больше другой, а его диагональ равна 25 см. Найдите стороны прямоугольника.

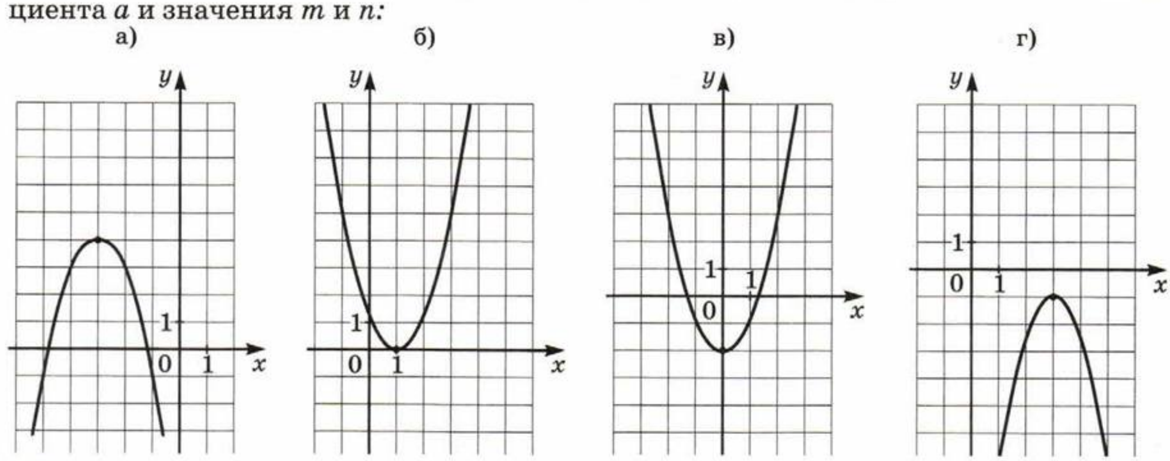
б) Найдите три последовательных натуральных числа, сумма квадратов которых равна 77.

548 Решите задачу:

а) В параде 7 ноября 2012 года на Красной площади приняли участие более 6 тысяч человек. Среди них было 1936 представителей Московских кадетских корпусов, проходивших по площади в 22 колоннах. Число человек в каждом ряду на три меньше количества рядов. Сколько рядов и сколько кадетов было в каждом ряду в одной колонне?

б) При использовании салютной установки праздничный фейерверк взлетел вверх со скоростью 40 м/с. Через сколько секунд он окажется на высоте 35 м? ($h = v_0t - \frac{gt^2}{2}$; $g \approx 10$ м/с^2).

549 На рисунке изображен график функции $y = a(x + m)^2 + n$. Определите знак коэффициента a и значения m и n:



550 Найдите координаты вершины параболы:

а) $y = x^2 - 2x + 14$; б) $y = -x^2 + 18x - 81$; в) $y = 5x^2 - 5$; г) $y = 1{,}2x^2 - 6x$.

551 Найдите координаты точек пересечения параболы с осями координат:

а) $y = -x^2 + 9$; б) $y = 5x^2 - x$; в) $y = x^2 - x - 72$; г) $y = 4x^2 + 7x - 3$.

552 Квадратичная функция задана формулой $y = ax^2 - 8x + 5$. Найдите значение коэффициента a, если известно, что прямая $x = 2$ является осью симметрии параболы.

553 Квадратичная функция задана формулой $y = -x^2 + 6x + c$.

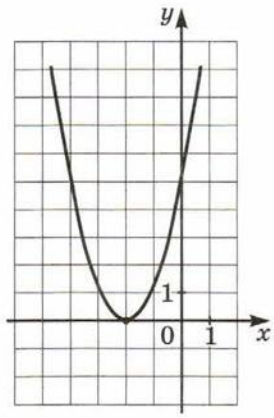
а) Напишите уравнение оси симметрии параболы заданной функции,

б) Найдите значение коэффициента c, если известно, что наибольшее значение функции равно 4.

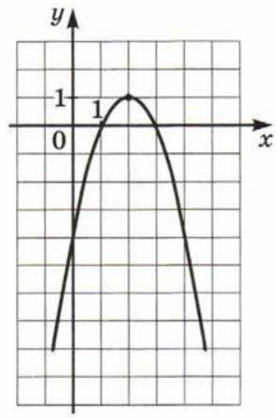
Задачи для самоконтроля к Главе 4

554 Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ задана графически. Определите знаки коэффициентов a, b, c и дискриминанта D соответствующего квадратного трехчлена:

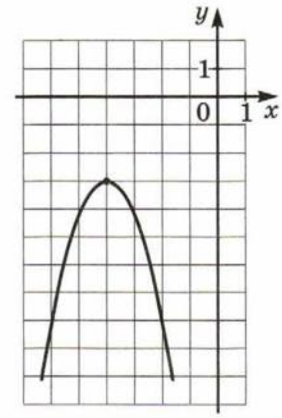
а)



б)



в)



555 Постройте график функции:

а) $y = (x - 4)^2 + 1$; в) $y = 2x^2 - 8x$; д) $y = -x^2 - 4x + 12$;

б) $y = -(x + 1)^2 - 5$; г) $y = -4x^2 - 12x - 9$; е) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$.

556 Постройте график функции и «прочитайте» его:

а) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant 9; \\ |x|, \text{ если } -1 \leqslant x < 0; \\ -x^2 - 4x - 2, \text{ если } -3 \leqslant x < -1 \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} 2x - 2, \text{ если } 1 \leqslant x \leqslant 3; \\ -3x^2 + 3x, \text{ если } -1 \leqslant x < 1; \\ \frac{6}{x}, \text{ если } -3 \leqslant x < -1 \end{cases}$

557 Найдите наибольшее и наименьшее значение квадратного трехчлена:

а) $x^2 + 2x + 1$ на отрезке $[-2; 0]$;

б) $x^2 - 10x + 27$ на отрезке $[0; 4]$;

в) $-5x^2 + 12x - 8$ на отрезке $[-2; 0]$.

558 Решите квадратные неравенства:

а) $-3x^2 - 2x > 0$; в) $4 + x^2 \leqslant 0$; д) $x^2 + x - 56 > 0$; ж) $-x^2 - x - 6 < 0$;

б) $x^2 - 5 \leqslant 0$; г) $x^2 + 5 > 0$; е) $-4x^2 + 4x - 1 \geqslant 0$; з) $2x^2 - 5x + 3 \leqslant 0$.

559 Найдите значения x, при которых данное выражение имеет смысл:

а) $\sqrt{3x^2 - x - 14}$; б) $\sqrt{-x^2 + 10x - 25}$; в) $\frac{1}{\sqrt{4 - 8x - 5x^2}}$.

560 Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 15x^2 + x - 2 > 0 \\ 2x - 1 \leqslant 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} -x^2 + 13x - 36 \geqslant 0 \\ 6 - 1{,}5x \geqslant 0 \end{cases}$; в) $\begin{cases} -x^2 - 4x + 21 < 0 \\ 3x^2 + 8x + 5 > 0 \end{cases}$.

561 Укажите область допустимых значений переменной:

а) $\sqrt{-x - 1} + \sqrt{8x^2 + 10x - 3}$; б) $\sqrt{x^2 - 5x} + \sqrt{-3x^2 + 10x - 3}$.

562 а) При каких значениях параметра a неравенство $-x^2 + (a + 1)x - 1 \geqslant 0$ имеет хотя бы одно решение?

б) При каких значениях параметра a неравенство $ax^2 + ax + 1 < 0$ не имеет решений?

1. а) 0; 0,25; 0,25; 1; 1; 49; 49; б) 0; $\frac{8}{27}$; $-\frac{8}{27}$; 1; −1; 64; −64. **3.** 1) $S = a^2$; 2) $r = b^2$; 3) $G = h^2$; 4) $c = z^2$; 5) $y = x^2$. **4.** 1) $V = a^3$; 2) $r = b^3$; 3) $G = h^3$; 4) $c = z^3$; 5) $y = x^3$. **7.** а) $y_{наиб} = 1$; $y_{наим} = 0$; б) $y_{наиб} = 81$; $y_{наим} = 0$; в) $y_{наиб} = 16$; $y_{наим} = 0$. **8.** а) $y_{наиб} = 1$; $y_{наим} = -1$; б) $y_{наиб} = 128$; $y_{наим} = 0$; в) $y_{наиб} = 1$; $y_{наим} = -128$. Функция $y = x^7$ отрицательна при $x \in (-\infty; 0)$, положительна при $x \in (0; +\infty)$. **9.** а) $n = 1$; б) $n = 2$. **11.** Четные функции: а, в, г, д, и; нечетные функции: б, е, л, м; функции, не являющиеся ни четной, ни нечетной: ж, з, к. **13.** Четные: а, в; нечетные: д. **14.** 1) 1; 4; 0; 3) [−4; −2] и [0; 2]. **15.** 1) −2; −4; −4; 3) [−2; 2]; 4) [−4; −2] и [2; 4]. **20.** а) одна; б) одна; в) одна. **21.** а) да; б) да. **22.** а) две, ±1; б) две, 0, 1; в) одна, 1. **23.** а) {−1; 1}; б) {0; 1}; в) {1}. **24.** а) {−1}; б) {1; 3}; в) {−1; 0; 1};г) {−1; 0; 1}. **27.** а) >; б) <; в) >; г) <; д) >; е) <. **28.** а) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; б) $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$; в) $m \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$, $n \in (-\infty; 0) \cup (0; 2{,}5) \cup (2{,}5; +\infty)$. **29.** а–3; б–5; в–6; г–2; д–4; е–1. **31.** $(-3; +\infty)$. **32.** 1) нет; 2) нет; 3) $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$; $E(y) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$. **33.** а) $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; б) $[-4; 2) \cup (2; 4]$; в) $[-2; 0) \cup (0; 2]$; г) $(-\infty; -1) \cup (-1; 1)$. **35.** а) равно; б) меньше; в) меньше; г) больше. **36.** а) меньше; б) меньше; в) меньше; г) меньше. **37.** $y_{наиб} = 256$; $y_{наим} = 0$. **38.** $y_{наиб} = 32$; $y_{наим} = -1$. **39.** а) 2; б) 3; в) 2. **40.** а) {−2; −1}; б) {0}; в) {−1; 1}; г) {−1; 0}. **41.** а) да; б) нет. **42.** Четные функции: а, б, в, и, к; нечетные функции: е, з, л, м; функции, не являющиеся ни четной, ни нечетной г, д, ж. **43.** а) четная; б) нечетная; в) нечетная; г) четная. **45.** 1) б, г; 2) а, д; 3) в, е. **46.** а) $a \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $b \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; б) $(-\infty; +\infty)$; в) $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$; г) $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 0{,}5) \cup (0{,}5; +\infty)$; д) $y \in (-\infty; -1) \cup (-1; 2) \cup (2; +\infty)$; е) $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$; $y \in (-\infty; -3) \cup (-3; 0) \cup (0; +\infty)$. **47.** а) −4); б) −2); в) −3); г) −1). **48.** 1 – б; 2 – а. **50.** а) 5; в) 0,2; г) 0,5; ж) 0,25; з) −5. **51.** 1) $t = \frac{2}{v}$; 2) $n = \frac{150}{a}$; 3) $y = \frac{k}{x}$. **52.** 300; 100; 20; 0,4; 0,06; 0,005. Принадлежат: B, C, F. **53.** а) $y = \frac{-2}{x}$; б) $y = \frac{54}{x}$; в) $y = \frac{25}{x}$; г) $y = \frac{-140}{x}$; д) $y = \frac{-1}{x}$. **54.** а) нет; б) да; в) нет; г) да; д) нет; е) нет. **56.** а) I, III; б) II, IV; в) II, IV; г) I, III. **57.** $y = \frac{k_2}{x}$. **59.** а) $y_{наиб} = -1$; $y_{наим} = -9$;б) $y_{наиб} = 1$; $y_{наим} = \frac{1}{3}$. **60.** а) $y_{наиб} = 3$; $y_{наим} = \frac{1}{3}$; б) $y_{наиб} = -5$; $y_{наим} = -10$. **61.** а) нечетные; б) ни четная, ни нечетная; в) ни четная, ни нечетная; г) ни четная, ни нечетная. **62.** а) г, д; б) а, б, в. **63.** а) 1; б) 0,1; в) −5; г) $-\frac{5}{6}$; д) −2000; е) $\frac{1}{5a}$. **64.** а) $-\frac{4}{b}$; б) $\frac{1}{d^2}$; в) $\frac{2}{m+2}$; г) $t + 10$. **66.** а) {−1}; б) {−1; 1}; в) {−2,5}; г) {−1; 1}; д) ∅; е) ∅; ж) $\left\{-1; -\frac{2}{3}\right\}$; з) {−2}. **67.** а) (0,5; 1); б) (0,5; −5); в) (3; 2); (−3; −2); г) (1; −6); (−3; 2); д) (4; 2); (2; 4); е) (−1; 3); (−1,5; 2); ж) (1; 1); з) (1; 1); (−1; −1); и) (−2; 2); к) $(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$. **68.** а) одно; б) нет; в) два. **75.** 1) а, б, в, д, е, ж. 2) е; 3) б; 4) б, в, г, д, е, ж, з; 5) б, в, д, е, ж; 6) а, б, е, з. **76.** а) $(-\infty; 0) \cup (0; 3) \cup (3; +\infty)$; б) $(-\infty; +\infty)$; в) $(-\infty; -12) \cup (-12; 0) \cup (0; +\infty)$; г) $(-\infty; -5) \cup (-5; 5) \cup (5; +\infty)$; д) $(-\infty; +\infty)$. **79.** а) 0,(5); б) 0,8(6); в) −5,(18); г) 3,5(0). **80.** а) $\frac{61}{99}$; б) $\frac{13}{33}$; в) $\frac{5}{18}$; г) $-\frac{14}{45}$; д) $\frac{283}{55}$; е) $-\frac{433}{99}$. **83.** а) $y = -\frac{3{,}5}{x}$; б) $y = \frac{7}{x}$; в) $y = \frac{0{,}5}{x}$; г) $y = -\frac{5{,}2}{x}$. **84.** а) да, б) да, в) нет. **86.** а) I, III; б) II, IV; в) II, IV;г) I, III. **87.** а) $k = 6$; I, III; б) $k = -20$; II, IV; в) $k = -63$; II, IV; г) $k = -20$; II, IV. **89.** а) $y_{наиб} = 8$; $y_{наим} = 2$; б) $y_{наиб} = 16$; $y_{наим} = 4$. **90.** а) нечетная; б) ни четная, ни нечетная. **91.** а) −18; б) 9000; в) $\frac{90}{d+12}$; г) $\frac{10}{a}$; д) $-\frac{9}{q}$. **92.** а) {2}; б) {1; 2}; в) {6}; г) {1; 3}; д) ∅; е) ∅. **93.** а) (1; 4); б) (2: −4); (−2; 4); в) (2; 4); г) (2; 8); (−2; −8); д) (−1; 5); (−5; 1); е) (1; 2); ж) ∅; з) ∅. **97.** а) нечетное; б) четное; в) четное; г) нечетное. **98.** а) в, г; б) а, д. **101.** а) $(-\infty; -8) \cup (-8; +\infty)$; б) $(-\infty; +\infty)$; в) $(-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$; г) $(-\infty; -5) \cup (-5; 0) \cup (0; +\infty)$;

д) $(-\infty; -4) \cup (-4; 4) \cup (4; +\infty)$. **105.** Нельзя с помощью нескольких таких операций из чисел 1, 3, 5, 10 получить четыре равных числа. **109.** 4. **117.** −0,25; −0,5; −1; −0,5; 0; 24. **118.** Нет; 4; 6; 3,2; 2; нет. **123.** $\frac{13}{5}$; $\frac{-6}{1}$; $\frac{37}{100}$; $\frac{0}{a}$; $\frac{-4}{7}$; $\frac{3}{50}$; $\frac{-91}{6}$. **124.** а) 0,(3); б) 0,(216); в) 0,4(6); г) 3,(0); д) −15,15(0); е) 2,(4); ж) −6,41(6); з) 8,(09). **125.** а) $\frac{37}{3}$; б) $\frac{122}{99}$; в) $\frac{689}{45}$; г) $-\frac{6937}{495}$; д) $\frac{3667}{450}$ **127.** $(-\infty; +\infty)$. **128.** [1,4; 1,5). **130.** $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$; 3; 5; нет; $\frac{1}{5}$; 0,1. **131.** 2. **132.** 1; 2; 9; 0; −4,5; нет. **135.** а) 0,25(0); б) 0,(2); в) 3,(6); г) 8,09(0); д) −1,(6); е) −8,(63). **136.** а) $\frac{10}{9}$; б) $\frac{21}{10}$; в) $-\frac{202}{33}$; г) $\frac{4889}{495}$; д) $-\frac{1339}{9900}$. **137.** $(-\infty; 5]$. **138.** $\left[0,25; \frac{1}{3}\right)$. **145.** а, г, е, ж, з. **146.** а) 30; б) 0,6; в) −1,3; г) $\frac{5}{3}$; д) 10; е) 75; ж) 4,9; з) 2; и) 135; к) 200; л) 0,37; м) −0,4; н) 64; о) 0,4; п) 0; р) $-\frac{7}{39}$. **147.** а) $[0; +\infty)$; б) $(-\infty; +\infty)$; в) $(-\infty; 0]$; г) $[4; +\infty)$; д) $(-\infty; +\infty)$; е) $\{0\}$. **148.** а) 2; б) 8; в) −4; г) −4; д) 64; е) 64. **149.** а) 6; б) 10; в) 12. **150.** а) 3; б) 2; в) $\frac{1}{3}$. **151.** а) 35; б) 0,12; в) 90; г) $\frac{6}{11}$; д) $\frac{15}{4}$. **152.** а)5; б) 5; в)6; г) 6; д)36 ; е) 36; ж) 243; з) 243; и) 3^x; к) 3^x. **153.** а) $|c|$; б) $-c$; в) c; г) d^{50}; д) a^{2n}; е) $5t^4\sqrt{2}$; ж) $-6b^8t|t|$; з) $\frac{2}{5}|a|m^3$. **155.** а) $3\sqrt{2}$; б) $8\sqrt{2}$; в) $\frac{3}{5}\sqrt{\frac{3}{5}}$; г) $4\sqrt{a}$; д) $|x^3|y^6\sqrt{y}$; е) $\frac{x^5\sqrt{x}}{y^2}$. **156.** а) $\sqrt{27}$; б) $-\sqrt{50}$; в) $\sqrt{121b^3}$; г) $\sqrt{80a^5}$. **160.** а) 3; б) 30. **161.** а) $\{25\}$; б) $\{144\}$; в) $\{196\}$; г) $\{1\}$;д) $\{0\}$; е) $\varnothing$; ж) $\{6\}$; з) $\varnothing$; и) $\{4\}$. **162.** а) 6; б) −41; в) 0,5; г) $\frac{2}{3}$. **164.** а) одно, при любом a; б) $a = 4$, бесконечно; $a \neq 4$ нет решения; в) $a = 2$, нет решения; $a \neq 2$, одно решение. **166.** а) $x(x-2)$; б) $ab(a^2b - a + 1)$; в) $(2k - 3t)(2k + 3)$; г) $(2y - 7z)(2y + 7z)$; д) $(5m^2 - n^3)\cdot(5m^2 + n^3)$; е) $2(4pq^4 - r^5)(4pq^4 + r^5)$; ж) $(d + 3h^2)^2$;з) $(a^3 - 1{,}5b^4)^2$; и) $(3 - 2p + x)(3 + 2p - x)$; к) $(s+3)(s^2 - 3s + 9)$; л) $(z^3 - 5)(z^6 + 5z^3 + 25)$;м) $(ac + 2b^3)(a^2c^2 - 2ab^3c + 4b^6)$. **167.** а) $4a^2 - 9s^2$; б) $0{,}01x^4 - y^2$; в) $64t^4 - 80t^2r + 25r^2$; г) $0{,}09d^2 + 0{,}08dq^3 + \frac{4}{225}d^6$; д) $v^3 - 1$; е) $8w^3 + 27c^6$. **168.** а) t; б) $b - 2$; в) $6 - 0{,}5x$. **169.** а) 28; б) −7; в) 323; г) 13; д) 1,7; е) −2,4. **172.** а) 36; б) 175; в) 5,2; г) 256; д) $81\sqrt{3}$. **173.** а) 1; б) 42. **174.** а) $9\sqrt{2}$; б) $\frac{5}{7}$. **175.** а) $u^3v^6\sqrt{u}$; б) $\frac{u\sqrt{u}}{v^4}$. **176.** а) $\sqrt{216}$; б) $-\sqrt{405}$; в) $\sqrt{1{,}44d^3}$; г) $\sqrt{169z^5}$. **177.** а) $\{121\}$; б) $\{7\}$; в) $\varnothing$; г) $\{9\}$. **178.** а) $m^4(m-4)$; б) $24n^2k^2(n^2k + 3)$; в) $(14y + 7z)(14y - 7z)$; г) $d(d-3)(d+3)$; д) $(7s + c)^2$; е) $(4x^2 - 0{,}125y^2)^2$; ж) $(m - 8)(m^2 + 8m + 64)$; з) $(3p^5 - q)(9p^{10} + 3p^5q + q^2)$. **179.** а) $0{,}04d^2 - p^2$; б) $\frac{1}{9}h^6 - 10h^3k + 225k^2$; в) $n^3 - 64$. **180.** а) $-x$; б) $8 - y$; в) $9 - 1{,}8a$. **184.** а, в, г, ж, з. **185.** а) 2^2, б) $\left(\sqrt{7}\right)^2$, в) нет, г) $\left(\sqrt{b}\right)^2$, д) $\left(3\sqrt{d}\right)^2$. **186.** а) $25 - a$; б) $b - c$; в) $9t - 16s$; г) $1 + 2\sqrt{m} + m$; д) $p - 2\sqrt{pq} + q$; е) $10 - 2\sqrt{21}$; ж) $4x - 28\sqrt{xy} + 49y$; з) $1 - a\sqrt{a}$; и) $m\sqrt{m} + n\sqrt{n}$. **187.** а) $6(6 + b)$; б) $\sqrt{10}(\sqrt{10} + b)$; в) $\sqrt{7a}(\sqrt{2a} - 1)$; г) $(x-3)(x+3)$; д) $(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$; е) $(8\sqrt{y} - \sqrt{7})(8\sqrt{y} + \sqrt{7})$; ж) $(z - 6t)^2$; з) $\left(\sqrt{n} + \sqrt{k}\right)^2$; и) $(15\sqrt{a} - 4\sqrt{b})^2$. **189.** а) $6\sqrt{3}$; б) $\sqrt{5}$; в) $\sqrt{a} + 6\sqrt{b}$; г) $5\sqrt{7} - 2\sqrt{5}$. **190.** $2a + 1$; $3 - a$; $a - 1$. **191.** $4 - x^2$. **192.** а) 6; б) 1; б) $3\sqrt{5} - 7$. **194.** а) $2 + \sqrt{5}$; б) $\sqrt{7} - 1$; в) $4 - \sqrt{2}$. **195.** а) 7; б) 7; в) $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **196.** а) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$; б) $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$; в) $5\sqrt{3} - 5\sqrt{2}$; г) $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{30}}{12}$. **198.** $5\sqrt{3}$; $4\sqrt{5}$; 9; $\sqrt{95}$; $7\sqrt{2}$; $3\sqrt{11}$; 10; $2\sqrt{26}$. **199.** а) 110; б) 60. **200.** $\sqrt{0{,}01}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{8}$; 0,6; $\sqrt{\frac{25}{49}}$. **201.** а) −1,5; б) $\frac{5}{3}$. **202.** а) 1; 16; б) 1; 2; 3. **203.** а) $4 - \sqrt{13}$; б) $\sqrt{101} - 10$; в) $1 + \sqrt{3}$; г) $5 + \sqrt{7}$; д) $x - 1$; е) 1. **204.** а) $6\sqrt{2}$; б) $-\sqrt{5}$; в) −6; г) −4. **205.** а) $\frac{7\sqrt{11}}{7}$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $-3 - \sqrt{14}$; г) $\frac{7}{8}(\sqrt{17} - 3)$; д) $2\sqrt{2} - 5$; е) $\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{7}}{4}$; ж) $\frac{\sqrt{30}+\sqrt{18}-\sqrt{12}}{12}$;

з) $\dfrac{6\sqrt{3}+4\sqrt{5}+5\sqrt{6}+\sqrt{10}}{28}$. **207.** $6\sqrt{3}$; $4\sqrt{7}$; 11; $5\sqrt{5}$; $8\sqrt{2}$; $\sqrt{130}$; 12. **211.** 1. **212.** 1) $a=\sqrt{S}$; 2) $k=\sqrt{c}$; 3) $y=\sqrt{x}$; **213.** 1) 0; 1; 4; 6,25; 2) 0; 1; $\sqrt{2}$; $\sqrt{2,5}$. **214.** а) больше; б) больше; в) больше; г) меньше. **215.** а) больше; б) больше. **216.** а) $\dfrac{16}{81}$; б) 100 000 000. **217.** 12 множителей. **218.** 0; 13. **221.** а) $\{0;7\}$; б) $\{-2; -1,5; 2\}$; в) $\{2; 10\}$. **222.** а) 1,4; б) 1,7; в) 2,2; г) 2,4. **224.** −1. **225.** а) $40\,000\sqrt{10}$; б) 132 250 000. **226.** 126 множителей. **227.** а) $\{-3; 0; 3; 5\}$; б) $\{3+\sqrt{2}; 3-\sqrt{2}\}$. **231.** а) $1<\sqrt{2}<2$; $1<\sqrt{3}<2$; $2<\sqrt{5}<3$; б) $1,4<\sqrt{2}<1,5$; $1,7<\sqrt{3}<1,8$. **232.** а) 1; б) 7. **234.** а) 2 и 3; б) 4 и 5; в) 17 и 18; г) 31 и 32; д) 5 и 6; е) 17 и 18; ж) 31 и 32; з) 31 и 32; и) 4 и 5; к) 5 и 6; л) 9 и 10; м) 64 и 65. **235.** а) 3; б) 3,3; в) 3,32; г) 3,317. **237.** 0,4. **238.** а) 9; б) 16; в) 1; г) 0,25. **239.** а) $(x-3)(x+5)$; б) $(a-1)(a+5)$; в) $(x-1,5)(x+2,5)$. **240.** а) 2 и 3; б) 8 и 9; в) 27 и 28; г) 88 и 89; д) 31 и 32; е) 29 и 30; ж) 23 и 24; з) 418 и 419; и) 7 и 8; к) 8 и 9; л) 44 и 45; м) 63 и 64. **241.** а) 4; б) 4,4; в) 4,36; г) 4,359. **242.** а) $(x-6)(x+4)$; б) $(a+2)(a+10)$; в) $(x-0,5)(x+1,5)$. **244.** А) 1) а) больше; б) больше; в) равно; 2) а) $y_{наиб}=16$; $y_{наим}=0$; б) $y_{наиб}=1$; $y_{наим}=0$; в) $y_{наиб}=1$; $y_{наим}=0$; 3) положительна на $(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$; нигде не отрицательна, равна 0 при $x=0$. Б) 1) а) меньше; б) меньше; в) меньше; 2) а) $y_{наиб}=32$; $y_{наим}=-32$; б) $y_{наиб}=0$; $y_{наим}=-1$; в) $y_{наиб}=1$; $y_{наим}=0$; 3) положительная на $(0; +\infty)$; отрицательная на $(-\infty; 0)$; равна нулю в 0. **245.** 1) −1; −1; 0; −1; −1; 2) $[-1; 0]$; 3) $[-5; -1]\cup[1; 5]$. **246.** 1) −1; −4; −2; 2) $[-2; 2]$; 3) $[-5; -2]\cup[2; 5]$. **248.** а) $\{-1\}$; б) $\varnothing$; в) $\{0; 1\}$. **249.** 300; 15; −20; −0,36; −0,06; $\dfrac{1}{300}$. Принадлежат точки: A, C, F. **252.** а) 1,8; б) −30; в) 1,8; г) −1,5; д) −9000; е) $\dfrac{9}{10m}$. **253.** а) (1; 3); (3; 1); б) (1; −7); (−1; 7); в) (−2; −4); $(-\dfrac{4}{3}; -6)$. **254.** а) одно; б) нет; в) два. **257.** Нет; 2; 1; $\dfrac{1}{16}$; 0; 16. **258.** а) 20; б) 0,7; в) 8; г) 125; д) 66; е) 40; ж) 0,2; з) 3; и) 10; к) 60. **259.** а) 90; б) 105; в) $\dfrac{17}{30}$; г) 9; д) 105; е) 9,6. **260.** а) $10\sqrt{2}$; б) $15\sqrt{2}$; в) $\dfrac{8}{7}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; г) $10\sqrt{m}$; д) $2d^5k^5\sqrt{k}$; е) $\left(\dfrac{z}{n}\right)^4\sqrt{z}$. **261.** а) $7-x$; б) $\dfrac{2-5x}{\sqrt{5}}$. **262.** а) $\sqrt{8}$; б) $-\sqrt{27}$; в) $\sqrt{169m^3}$; г) $\sqrt{16d^7}$. **263.** а) $6-18\sqrt{2}$; б) 0; в) $-3m^2$; г) 6. **264.** а) $\{49\}$; б) $\{625\}$; в) $\{1225\}$; г) 1; д) $\varnothing$; е) $\{0\}$; ж) $\{10\}$; з) $\varnothing$; и) $\{10\}$. **265.** а) $1-m$; б) $d-c$; в) $4+8\sqrt{q}+4q$; г) $k-2\sqrt{kz}+z$; д) $25b+4\sqrt{b}+0,16$; е) $8-s\sqrt{s}$. **266.** а) 2; б) −55; в) 3; г) −0,1. **267.** а) $11+2\sqrt{10}$; б) $56+12\sqrt{3}$; в) $\dfrac{11(4+\sqrt{7})}{9}$; г) $4\sqrt{7}$. **268.** а) $\sqrt{11}(\sqrt{11}+m)$; б) $\sqrt{3m}(\sqrt{2m}-1)$; в) $(x-\sqrt{13})(x+\sqrt{13})$; г) $(\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x}+\sqrt{5})$; д) $(\sqrt{c}+\sqrt{s})^2$; е) $(\sqrt{a}-14\sqrt{b})^2$. **269.** а) $2\sqrt{3}$; б) $14\sqrt{2}$; в) $-\sqrt{n}+11\sqrt{v}$; г) $3\sqrt{2}+4\sqrt{3}$. **270.** а) $2\sqrt{2}-1$; б) 7; в) $18-5\sqrt{12}$; г) $36\sqrt{5}+24$. **271.** а) $2+\sqrt{6}$; б) $\sqrt{10}-1$; в) $6-\sqrt{15}$. **272.** а) $\dfrac{17\sqrt{2}}{2}$; б) $\dfrac{5\sqrt{13}}{91}$; в) $\dfrac{5-\sqrt{5}}{5}$; г) $\dfrac{9+3\sqrt{6}}{2}$; д) $-12\sqrt{3}+12\sqrt{7}$); е) $-\sqrt{11}-\sqrt{13}$; ж) $\dfrac{5\sqrt{2}+\sqrt{10}+2\sqrt{15}}{20}$; з) $9-5\sqrt{3}-3\sqrt{7}+2\sqrt{21}$. **273.** $9\sqrt{2}$; $7\sqrt{3}$; 12; $5\sqrt{5}$; $\sqrt{65}$; $3\sqrt{7}$; $2\sqrt{15}$. **274.** 1) а) больше; б) больше; в) меньше; г) меньше. **275.** а) 1 и 2; б) 3 и 4; в) 17 и 18; г) 22 и 23. **276.** а) $\{0; 1\}$; б) $\{0; 1\}$; в) $\{-2; 1\}$; г) $\varnothing$; д) $\{-4; 4\}$. **278.** а) нет; 0,25; 1; 0; 0,5; 0,7; 1; 0,5; нет. в) $y_{наиб}=1$; $y_{наим}=0$. **283.** а) 0; б) $\{5; -5\}$; в) $\{\sqrt{3}; -\sqrt{3}\}$; г) $\varnothing$; д) $\varnothing$. **284.** а) $\{0;7\}$; б) $\{0; 2\}$. **285.** а) 0; б) $\varnothing$; в) $\{-1; 1\}$. **286.** а) $\left\{0; -\dfrac{1}{4}\right\}$; б) $\{0; -4\}$; в) $\{0; 9\}$. **287.** а) $\{0; \sqrt{3}; -\sqrt{3}\}$; б) 0; в) $\left\{0; -\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}\right\}$; г) $\{0\}$. **288.** а) 0; б) 4; в) $\{-3; 1\}$; г) $\{3;11\}$; д) $\{\sqrt{2}+1; -\sqrt{2}+1\}$; е) $\{\sqrt{2}-2; -\sqrt{2}-2\}$; ж) $\varnothing$; з) $\varnothing$. **290.** а) 0; б) $\varnothing$; в) $\{3; -3\}$. **291.** а) $\{0; -0,2\}$; б) $\{0; -5\}$; в) $\{0; 25\}$. **292.** а) $\{0; \sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$; б) 0; в) $\{-1; 0; 1\}$; г) 0. **293.** а) $\{-3; 3\}$; б) $\{-4; 1\}$; в) $\{1-\sqrt{11}; 1+\sqrt{11}\}$; г) $\varnothing$. **303.** а) $\left\{-\dfrac{1}{3}; 0,5\right\}$; б) 4; в) $\left\{\dfrac{5+\sqrt{13}}{6}; \dfrac{5-\sqrt{13}}{6}\right\}$;

г)$\{3+\sqrt{3};\ 3-\sqrt{3}\}$; д) $\varnothing$; е) $\varnothing$. **304.** а)$\{-2;\ 4\}$; б)$\{-1;-7\}$; в) $\varnothing$; г)$-0,5$. **305.** б)4; г)$\{3+\sqrt{3};3-\sqrt{3}\}$; е) $\varnothing$. **306.** а)$\{-0,5;\ -2\}$; б)$\{-2;\ 5\}$; в) $\left\{\dfrac{5-\sqrt{19}}{3};\dfrac{5+\sqrt{19}}{3}\right\}$; г) $\{1;\ -4\}$. **307.** а) $\varnothing$; б) $\left\{\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{3};\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{3}\right\}$; в)$\{-\sqrt{2};\ -2\sqrt{2}\}$. **309.** а) при $a\neq 6$ единственное решение; при $a=6$ бесконечно много решений; б) при $a\neq 2$ единственное решение; при $a=2$ нет решений; в) при $a\neq\pm1$ единственное решение; при $a=1$ бесконечно много решений; при $a=-1$ нет решений. **310.** а) $[3;6)$ и $(-\infty;+\infty)$; б) $\left[1\dfrac{1}{3};1\dfrac{2}{3}\right]$ и $(-\infty;+\infty)$. **311.** а) $(-3;+\infty)$; б) $(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$. **313.** а) $\left\{\dfrac{2}{3};1\right\}$; б) $\{-10;3\}$; в) $\left\{-2;8\dfrac{2}{3}\right\}$; г) $\{-2,8;\ 1\}$. **314.** а) $\{4;\ 6\}$; б) $\varnothing$; в) $\{0,5;\ 1\}$; г) $\{2;\ 3\}$. **315.** а) $\varnothing$; б) $(-\infty;-2)\cup\left(\dfrac{12}{7};+\infty\right)$. **329.** $\{2,5;\ -2;\ 1;\ -0,5\}$. **331.** а) $\{1;\ -1;\ \sqrt{0,6};\ -\sqrt{0,6}\}$; б) $\{2;\ -2\}$; в) $\varnothing$; г) $\left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$. **332.** а) $\{-6;\ 6;\ -1;1\}$; б) $\{1,5;\ -1,5\}$; в) $\varnothing$. **334.** а) $\{-1;\ 1;\ -2;\ 2\}$; б) 1; в) 16. **335.** $\{-2;\ 4\}$. **336.** $\left\{1;2\dfrac{1}{7}\right\}$. **337.** $\{-0,75;\ -2\}$. **340.** а) $\{\sqrt{2};\ -\sqrt{2}\}$; б) $\varnothing$; в) $\{\sqrt{2};\ -\sqrt{2};\ \sqrt{0,5};\ -\sqrt{0,5}\}$. **341.** а) $\left\{\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{3}\right\}$; б) $\varnothing$; в) $\left\{-\dfrac{5}{7};\dfrac{5}{7}\right\}$; г) $\{-2;\ 2;\ 0,5;\ -0,5\}$. **342.** а) $\{0,5;\ -2,5\}$; б) $\{-0,8;\ -1,2\}$; в) $\left\{-1;\ 4;\ \dfrac{3\pm3\sqrt{5}}{2}\right\}$; г) $\{-2+\sqrt{6};\ -2-\sqrt{6}\}$. **347.** а) 4,4; б) $-9,2$. **350.** а) $\{-2;\ 5\}$; б) $\{2;\ -6\}$; в) $\{4;\ 7\}$; г) $\{-1;\ -15\}$. **351.** а) $\{-100;\ 1\}$; б) $\{1;\ -549\}$; в) $\{5;\ 1\}$; г) $\{3;\ 4\}$; д) $\left\{-1;\ \dfrac{2}{3}\right\}$; е) $\{2;\ 3\}$. **352.** а) $\{-1;\ -11\}$; б) $\left\{-1;\ \dfrac{2}{3}\right\}$; в) $\{-1;\ -6\}$. **354.** а) $\{1;\ -2,5\}$; б) $\left\{1;-\dfrac{1019}{1021}\right\}$; в) $\left\{-1;\ \dfrac{22}{35}\right\}$; г) $\left\{-1;-\dfrac{1}{6}\right\}$. **355.** -2. **356.** а) 5 и 10; б) нельзя; в) нельзя. **357.** $\{a;\ -a;\ -4\}$. **359.** а) $x^2+x-6=0$; б) $x^2+6x+5=0$; в) $24x^2-10x+1=0$; г) $6x^2+5x+1=0$. **360.** а) $15x^2-7x-2=0$; б) $7x^2-39x+20=0$; в) $18x^2+23x-6=0$; г) $50x^2+35x+6=0$. **361.** $x^2-2x-4=0$. **362.** Нет, не могут. **363.** а) $x^2-4x+1=0$; б) $x^2-6x+7=0$. **364.** 1,5. **365.** $-2,6$. **366.** $\dfrac{185}{2704}$. **369.** а) $\{1;\ 2\}$; б) $\{-8;\ 1\}$; в) $\{-1000;\ 1\}$; г) $\left\{-1;-\dfrac{12}{13}\right\}$. **371.** 497. **372.** а) $x^2-8x+15=0$; б) $x^2+2x-3=0$; в) $6x^2-x-1=0$; г) $10x^2+3x-1=0$. **373.** а) $2x^2-7x+6=0$; б) $14x^2-5x-1=0$; в) $20x^2-11x-3=0$. **374.** а) $x^2-2x-4=0$; б) $x^2-4x+2=0$. **384.** а) $\left\{1;\dfrac{2}{3}\right\}$; б) $\{-1,5;\ 1,5\}$; в) $\{1;\ 2,5\}$. **387.** а) $(x-3)(x-2)$; б) $3\left(x-\sqrt{\dfrac{5}{3}}\right)\left(x+\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)$; в) $(3-2x)(x-1)$. **390.** а) 5; б) 30. **391.** а) $7<\sqrt{55}<8$; б) $-14<-\sqrt{190}<-13$; в) $-20<-\sqrt{19\cdot21}<-19$; г) $34<\sqrt{30\cdot40}<35$. **392.** а) $(x+5)(x-2)$; б) $(2x-\sqrt{14})\left(x+\dfrac{\sqrt{14}}{2}\right)$; в) $(3x+1)(x-2)$; г) $(4-3x)(x-1)$; д) $2\left(x+\dfrac{3-\sqrt{41}}{4}\right)\left(x+\dfrac{3+\sqrt{41}}{4}\right)$. **393.** 13. **397.** а) $a<0$; б) $a=0$; в) $a>0$. **398.** $a=-2\ (x=1)$, $a=2\ (x=-1)$. **399.** $a=-2$. **400.** 31. **401.** $a\in(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$. **403.** $a=10$. **404.** 2. **405.** а) при $a=2$ $x=-2$; при $a<2$, $x_{1,2}=-2\pm\sqrt{4-2a}$; при $a>2$ нет корней; б) при любом значении a два корня $x_{1,2}=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2+12}}{6}$; в) при $a=0$ $x=1,5$; при $a=-\dfrac{1}{3}$ $x=3$; при $a\in\left(-\dfrac{1}{3},0\right)\cup(0;+\infty)$ $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+3a}}{a}$; при $a<-\dfrac{1}{3}$ нет корней. **407.** а) $\dfrac{16}{3}$; б) $\dfrac{46}{45}$. **409.** а) $a<0$; б) $a=0$; в) $a>0$. **410.** а) $a\in(-\infty;0,5)$; б) $a\in(-\infty;0,5]\cup\{1\}$; в) $a\in[0,5;+\infty)$. **411.** $a\in\left(-\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4}\right)$. **412.** а) $a\in(-\infty;4]$; б) $a\in(0;4)$; в) $a\in(-\infty;0)$; г) $a=0$; д) $a=\varnothing$. **413.** а) при $k\in(-1;+\infty)$ $x_{1,2}=-2\pm\sqrt{4+4k}$; при $k\in(-\infty;-1)$ нет корней; при $k=-1$ $x=-2$; б) при любом значении k два корня $x_{1,2}=\dfrac{k\pm\sqrt{k^2+5}}{5}$; в) при $k=0$, $x=\dfrac{3}{8}$;

при $k = -5\frac{1}{3}$ $x = \frac{3}{4}$; при $k \in \left(-5\frac{1}{3};+\infty\right)$ $x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+3k}}{k}$; при $k \in \left(-\infty;-5\frac{1}{3}\right)$ нет корней. **418.** 21 см и 30 см. **419.** 12 см и 16 см. **420.** 48 или 16 обезьян. **421.** 24 и 27; −24 и −27. **422.** 2,8 с. **423.** 12 тыс. руб. **424.** 3 ч и 6 ч. **425.** $8 + \sqrt{73}$ км/ч. **432.** а) 1999; б) 2001. **433.** 6 и 7. **434.** 3 дм. **435.** 24 кв. ед. **436.** 8 команд. **437.** 300 км. **438.** $10+2\sqrt{13}$; $2+2\sqrt{13}$ дней. **446.** 10 с. **453.** 9 м. **455.** $x^2 - 10x + 23 = 0$. **467.** $\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$; возрастает при $x \in \left(-\infty;\frac{1}{3}\right]$, убывает при $x \in \left[\frac{1}{3};+\infty\right)$. **468.** а) (−4; −19); б) $\left(\frac{5}{6};-1\frac{1}{12}\right)$; в) $\left(-\frac{3}{4};\ 6\frac{1}{8}\right)$. **471.** а) $(3,5;+\infty)$; б) $\left[1;4\frac{1}{3}\right)$; в) $\varnothing$; г) $\left(5\frac{2}{3};6\right]$; д) $\left[-1;-\frac{1}{3}\right)$; е) $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right]$; ж) $\left(-\frac{2}{5};-\frac{1}{3}\right]$; з) $\left(-\infty;-\frac{5}{9}\right]$. **474.** а) $(x+3)^2-16$; б) $2(x-1)^2+3$; в) $-(x+2)^2+5$; г) $-3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+1\frac{1}{3}$. **476.** а) $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$; б) $\left[-\frac{2}{5};+\infty\right)$; в) $\left(-\infty;-\frac{4}{7}\right)$; г) $\left(-\frac{2}{3};-\frac{7}{11}\right]$; д) (6; + ∞); е) (−1,5; 9]; ж) [−6; 2,55]; з) {5}. **486.** а) наибольшее значение 13 при $x = 3$; наименьшее значение 11 при $x = 4$; б) наибольшее значение $7\frac{1}{8}$ при $x = 1\frac{3}{4}$; наименьшее значение 4 при $x = 3$; в) наибольшее значение $\frac{1}{3}$ при $x = \frac{1}{3}$; наименьшее значение −8 при $x = 2$; г) наибольшее значение 0 при $x = -1$; наименьшее значение $-3\frac{1}{8}$ при $x = \frac{1}{4}$; д) наибольшее значение 24 при $x = 0$; наименьшее значение −6 при $x = 5$; е) наибольшее значение 2 при $x = 1$; наименьшее значение −0,45 при $x = 0,3$. **487.** а) 2 м; б) 11,025 м. **489.** а) 0; б) 0; в) 4; г) 22. **490.** а) $\sqrt{10}$; б) $-2\sqrt{21}$; в) $3\sqrt{42}$; г) $6\sqrt{38}$; д) $-2\sqrt{34}$; е) − 2; ж) $-\sqrt{6}$; з) 5; и) $\sqrt{10}-6$; к) 1. **491.** а) наибольшее значение 13 при $x = 2$; наименьшее значение 5 при $x = 0$; б) наибольшее значение 17 при $x = 2$; наименьшее значение $\frac{2}{3}$ при $x = -\frac{1}{3}$; в) наибольшее значение −2 при $x = 0$ и $x = 1,5$; наименьшее значение равно $-3\frac{1}{8}$ при $x = \frac{3}{4}$; г) наибольшее значение 2 при $x = 0$; наименьшее значение −13 при $x = 3$. **492.** а) 2; б) 1; в) −7; г) 33. **497.** 2) отрицательные значения при $x \in (-5;\ -1)$ положительные значения при $x \in (-\infty;-5) \cup (-1;+\infty)$. **498.** 1) $(-5;-1)$; 2) $(-\infty;4) \cup (4;+\infty)$. **499.** 1. а) $\left(-\infty;-1\frac{1}{3}\right] \cup [2;+\infty)$; б) $[3;5]$; в) $(-\infty;+\infty)$; г) $\varnothing$; д) $(-\infty;+\infty)$; е) $\varnothing$. 2. а) $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right) \cup (2;+\infty)$; б) $(-\infty;2] \cup [4;+\infty)$; в) $\varnothing$; г) $(-2;1)$; д) $[0;0,6]$; е) $(-\infty;-1) \cup (0;+\infty)$. **500.** а) 0; б) $(-\infty;-1,5) \cup (1,5;+\infty)$; в) $(-\infty;+\infty)$; г) $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3};+\infty\right)$; д) $\varnothing$; е) $\left[-\sqrt{\frac{5}{3}};\sqrt{\frac{5}{3}}\right]$. **501.** а) $(-\infty,0] \cup [9;+\infty)$; б) $[0;3,5]$; в) $(-\infty;-4] \cup [4;+\infty)$; г) $(-\infty;+\infty)$; д) $(-\infty;-7] \cup [-1;+\infty)$; е) $[-3;1]$; ж) −8; з) $(-\infty;+\infty)$. **502.** 2. **506.** а) [−4,5; + ∞); б) [7; + ∞); в) (− ∞; 16]; г) (− ∞; −2,4]; д) (− ∞; 6); е) (2; + ∞); ж) [1;+ ∞); з) (0; 1]. **507.** а) −2,5; б) $\varnothing$; в) $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right) \cup (1;+\infty)$; г) $(-\infty;-0,6] \cup [0;+\infty)$; д) $(-\infty;-4) \cup (0,5;+\infty)$; е) $(-\infty;+\infty)$. **508.** а) $(-\infty;+\infty)$; б) 2; в) $\left(0;\frac{1}{3}\right)$; г) $(-\infty;-1) \cup (0,2;+\infty)$; д) $(-\infty;1] \cup [2,5;+\infty)$; е) $\varnothing$. **509.** а) $(-\infty;0) \cup (0;+\infty)$; б) $(-1;1)$; в) $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3};+\infty\right)$; г) $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}};\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$; д) $(-\infty;+\infty)$. **510.** а) $(-\infty;0] \cup [1;+\infty)$; б) $(-\infty;-3] \cup [-2;+\infty)$. **511.** −2. **517.** $a \in (-2;2)$. **518.** $a \in \left(-\infty;-2-2\sqrt{2}\right] \cup \left[-2+2\sqrt{2};+\infty\right)$. **519.** $a \in \varnothing$. **520.** $\varnothing$. **521.** Если $k < 0$, то $x \in \left(1-\sqrt{-k};1+\sqrt{-k}\right)$; если $k \geqslant 0$, то нет решений. **522.** а) $(-\infty;-0,5) \cup (-0,2;+\infty)$; б) 5; в) $(-\infty;0] \cup [2;+\infty)$; г) $(5;9)$;

д) $(-\infty;-0{,}4]\cup[1;+\infty)$; е) $\left(-\sqrt{5};\sqrt{5}\right)$. **523.** а) (–2; 1]; б) ∅; в) (–∞;–1,5); г) 0,25. **524.** а) 5; б) $\frac{2}{3}$.
525. $a\in(-\infty;0)\cup(12;+\infty)$. **526.** Если $k<0$, то $x\in\left[\frac{3+\sqrt{9-9k}}{k};\frac{3-\sqrt{9-9k}}{k}\right]$; если $k=0$, $x\in(-\infty;\ 1{,}5]$; если $0<k<1$, $x\in\left(-\infty;\frac{3-\sqrt{9-9k}}{k}\right]\cup\left[\frac{3+\sqrt{9-9k}}{k};+\infty\right)$; если $k\geqslant1$, $x\in(-\infty;+\infty)$. **527.** $\frac{7}{10}$.
532. а) $x^2-4x-8=0$; б) $5x^2+11=0$. **533.** а) {0; –7}; б) {–14; 14}; в) ∅; г) 0. **535.** $a\in\left(-\frac{1}{8};+\infty\right)$.
536. $a\in(0;+\infty)$. **537.** а) {0,5; –7}; б) 0,4; в) {1; 1,5}; г) $\left\{\frac{-\sqrt{5}+7}{2};\ \frac{-\sqrt{5}-7}{2}\right\}$; д) $\left\{\pi;\frac{\pi}{5}\right\}$; е) $\left\{1+\sqrt{3};1-\sqrt{3}\right\}$; ж) $\left\{4(\sqrt{6}+\sqrt{2});4(\sqrt{6}-\sqrt{2})\right\}$; з) {1; 0,5}. **538.** {1,5; 2,5}. **539.** –90. **540.** –9. **541.** а) $x^2+\frac{24}{35}x-1=0$; б) $x^2+5\frac{19}{22}x+2=0$. **542.** 340. **543.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **544.** а) {2; 10}; б){–8; 4}; в){–2; 5}. **545.** а) нельзя; б) $(4x-3)^2$; в) $(4x+1)(x-1)$; г) $-\frac{1}{5}(x-6)(x-10)$; д) нельзя; е) $(\sqrt{5}x-\sqrt{3})(\sqrt{5}x+\sqrt{3})$. **546.** а) {–5; 5; –3; 3}; б) $\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$; в) $\left\{\sqrt{5}+3;-\sqrt{5}-3\right\}$; г) {–1; 1; –12; 12}; д) $\{-1\pm\sqrt{7};-1\pm\sqrt{5}\}$; е) {3; –4}. **547.** а) 15 см и 20 см; б) 4; 5; 6. **548.** а) 11 рядов по 8 кадетов в ряду; б) через 1 с и через 7 с. **550.** а) (1; 13); б) (9; 0); в) (0; –5); г) (2,5; –7,5). **551.** а) с Oy: (0; 9); с Ox: (3; 0) и (–3; 0); б) с Oy: (0; 0); с Ox: (0; 0) и (0,2; 0); в) с Oy: (0; –72); с Ox: (9; 0) и (–8; 0); г) с Oy: (0; –3); с Ox: (1; 0) и (0,75; 0). **552.** $a=2$. **553.** а) $x=3$; б) $c=-5$. **554.** а) $a>0$; $b>0$; $c>0$; $D=0$; б) $a<0$; $b>0$; $c<0$; $D>0$; в) $a<0$; $b<0$; $c<0$; $D<0$.
557. а) наибольшее значение 1 при $x=0$ и $x=-2$; наименьшее значение 0 при $x=-1$; б) наибольшее значение 27 при $x=0$; наименьшее значение 3 при $x=4$; в) наибольшее значение –8 при $x=0$; наименьшее значение –52 при $x=-2$. **558.** а) $\left(-\frac{2}{3};0\right)$; б) $\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$; в) ∅; г) $(-\infty;+\infty)$; д) $(-\infty;-8)\cup(7;+\infty)$; е) 0,5; ж) $(-\infty;+\infty)$; з) [1; 1,5]. **559.** а) $(-\infty;-2]\cup\left[2\frac{1}{3};+\infty\right)$; б) 5; в) $(-2;0{,}4)$. **560.** а) $(-\infty;-0{,}4)\cup\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$; б) 4; в) $(-\infty;-7)\cup(3;+\infty)$. **561.** а) $(-\infty;-1{,}5]$; б) ∅. **562.** а) $a\in(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$; б) $a\in[0;4]$.

Предметный указатель

Оглавление

Учебное издание

Петерсон Людмила Георгиевна
Агаханов Назар Хангельдыевич
Петрович Александр Юрьевич
Подлипский Олег Константинович
Рогатова Марина Викторовна
Трушин Борис Викторович

АЛГЕБРА

8 класс

В трех частях

Часть 2 (6+)

Художники ***П. А. Северцов, С. Ю. Гаврилова, А. Ю. Горнов***

Подписано в печать 05.04.2017. Формат 84x108/16. Объем 10,0 п. л. Усл. печ. л. 16,80.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Школьная.
Тираж 5000 экз. Заказ № м4509.

ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»
127473, Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 1
тел. (495) 181-53-44, e-mail: binom@Lbz.ru
http://www.Lbz.ru, http://metodist.Lbz.ru

Отпечатано в филиале «Смоленский полиграфический комбинат»
ОАО «Издательство «Высшая школа». 214020, Смоленск, ул. Смольянинова, 1.
Тел.: +7(4812) 31-11-96. Факс: +7 (4812) 31-31-70. E-mail: spk@smolpk.ru http://www.smolpk.ru